北京大学计算机科学与技术系教材

集合论与图论

离散数学二分册

▶ 耿素云 编著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

北京大学计算机科学技术系教材

集合论与图论

离散数学二分册

耿素云　编著

北 京 大 学 出 版 社
北　　京

内容提要

本书为离散数学第二分册，即集合论与图论部分（第一分册《数理逻辑》，第三分册《代数结构与组合数学》）。书中系统地介绍了朴素集合论与图论的基本内容，其中包括集合的基本概念、二元关系、函数、自然数、基数与序数；图的基本概念、图的连通性、欧拉图与哈密尔顿图、树、平面图、图的着色、图的矩阵表示、覆盖集、独立集、匹配等，还介绍了与带权图有关的几种图论中的算法。

本书适用于计算机及相关专业的本科生或研究生，也可供计算机专业科技人员学习或参考。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学 第2分册：集合论与图论/耿素云编著. 一北京：北京大学出版社，1997.12

ISBN 7-301-03604-3

Ⅰ. 离… Ⅱ. 耿… Ⅲ. ①离散数学②集合论③图论 Ⅳ. O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(97)第 26806 号

书　　名：集合论与图论

著作责任者：耿素云　编著

责 任 编 辑：段晓青　张礼夫

标 准 书 号：ISBN 7-301-03604-3/TP・381

出　版　者：北京大学出版社

地　　　址：北京市海淀区中关村北京大学校内　100871

电　　　话：出版部 62752015　发行部 62559712　编辑部 62752032

排　印　者：北京经纬印刷厂印刷

发　行　者：北京大学出版社

经　销　者：新华书店

850×1168　32 开本　12.25 印张　318 千字

1998 年 2 月第一版　1998 年 2 月第一次印刷

定　　　价：19.0 元

前 言

离散数学是研究离散量的结构及相互关系的数学学科，是现代数学的一个重要分支，它在计算机科学与技术领域中有着广泛的应用。因此，离散数学是计算机专业学生的一门极为重要的专业基础课程。通过本课程的学习，可以使学生掌握处理离散结构的描述工具与方法，并能培养学生的抽象思维和严格的逻辑推理能力。

一般说来，离散数学包含数理逻辑、集合论、图论、代数结构、组合数学等内容。我们将以上内容分成三个分册出版：第一分册为数理逻辑，第二分册为集合论与图论，第三分册为代数结构与组合数学。本套教材体系严谨、内容丰富、配有大量的例题与习题，并与计算机科学的理论与实践紧密结合，它适用于计算机及相关专业的本科生或研究生，也可供计算机专业科技人员使用或参考。

本书为第二分册，即集合论与图论部分。该分册系统介绍了朴素集合论与图论的基本内容。第一章到第六章的内容分别为集合、二元关系、函数、自然数、基数、序数，其中序数部分打了＊号，不做为基本要求，只供参考。第七章到第十四章的内容分别为图、欧拉图与哈密尔顿图、树、图的矩阵表示、平面图、图的着色、覆盖集与独立集、带权图及其应用。第十四章的内容可分到相关章节讲解，也可以最后统一讲解。

作者在编写本书过程中参阅了多种离散数学教材及有关资料，在此向有关作者们表示衷心的感谢。

在这里，我们还要特别感谢北大出版社和北大计算机系的领导，他们对本套教材的出版给予了大力支持与帮助。

最后，我们诚恳地期待读者对本套教材提出宝贵意见。

作者

1996年12月于北大

第一部分　集合论

目　录

第一部分　集合论

第二部分　图论

第一章 集　合

§1.1 集合的概念及集合之间的关系

自从19世纪末著名的德国数学家康托(G. Cantor 1845—1918)为集合论做奠基工作以来，集合论在一百多年的时间里，已经成为数学中不可缺少的基本的描述工具，集合已成了数学中最为基本的概念.

集合论分为两种体系，一种是朴素集合论体系，也称为康托集合论体系；另一种是公理集合论体系，本书不讨论公理集合论体系，在前6章介绍的是朴素集合论体系中的主要内容. 在朴素集合论体系中，有些概念，特别是关于集合的概念是不能精确定义的. 我们不给集合下严格定义，这丝毫不会影响对集合的理解.

一般地，人们用大写英文字母 A，B，C，…表示集合，用小写英文字母 a，b，c，…，表示集合中的元素. 用 $a \in A$ 表示 a 为 A 的元素，读作 a 属于 A，而用 $a \notin A$ 表示 a 不是 A 中的元素，读作 a 不属于 A. 一般用两种方法表示集合.

列举法：列出集合中的全体元素，元素之间用逗号分开，然后用花括号括起来. 设 A 是由 a，b，c，d 为元素的集合，B 是正偶数集合，则 $A=\{a,b,c,d\}$，$B=\{2,4,6,\cdots\}$.

描述法：用谓词 $P(x)$ 表示 x 具有性质 P，用 $\{x \mid P(x)\}$ 表示具有性质 P 的集合，例如，$P_1(x)$：x 是英文字母，$P_2(y)$：y 是十进制数字，则 $C=\{x \mid P_1(x)\}$，$D=\{y \mid P_2(y)\}$ 分别表示26个英文字母集合和10个十进制数字集合.

对于集合的表示法应该注意以下几点：

(1) 集合中的元素是各不相同的.

(2) 集合中的元素不规定顺序.

(3) 集合的两种表示法有时是可以互相转化的. 例如列举法中的 B 可用描述法表示为 $B=\{x \mid x>0$ 且 x 为偶数$\}$ 或 $\{x \mid x=2(k+1), k$ 为非负整数$\}$.

为方便起见，本书中指定 N, Z, Q, R, C 分别表示自然数集合(含 0)，整数集合、有理数集合、实数集合和复数集合. 有了这个规定之后，列举法中的 B 又可表示为 $\{x \mid x \in N$ 且 x 为非 0 偶数$\}$，或 $\{x \mid x=2(k+1)$ 且 $k \in N\}$. 由此可见，表示一个集合的方法是很灵活多变的，当然要注意准确性和简洁性. 下面讨论集合之间的关系.

定义 1.1 设 A, B 为二集合，若 B 中的每个元素都是 A 中的元素，则称 B 是 A 的**子集**，也称 A 包含 B 或 B 含于 A，记作 $B \subseteq A$. 其符号化形式为

$$B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x(x \in B \rightarrow x \in A).$$

若 B 不是 A 的子集，则记作 $B \nsubseteq A$，其符号化形式为

$$B \nsubseteq A \Leftrightarrow \exists x(x \in B \wedge x \notin A).$$

设 $A=\{a, b, c\}, B=\{a, b, c, d\}, C=\{a, b\}$，则 $A \subseteq B, C \subseteq A, C \subseteq B$.

定义 1.2 设 A, B 为二集合，若 A 包含 B 且 B 包含 A，则称 A 与 B **相等**，记作 $A=B$. 即

$$A=B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B).$$

设 $A=\{2\}, B=\{1,4\}, C=\{x \mid x^2-5x+4=0\}, D=\{x \mid x$ 为偶素数$\}$，则 $A=D$ 且 $B=C$.

设 A, B, C 为 3 个集合，容易证明下面 3 个命题为真：

(1) $A \subseteq A$；

(2) 若 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$，则 $B \nsubseteq A$；

(3) 若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq C$，则 $A \subseteq C$.

定义 1.3 设 A,B 为二集合，若 A 为 B 的子集，且 $A\neq B$，则称 A 为 B 的**真子集**，或称 B 真包含 A，记作 $A\subset B$. 即

$$A\subset B\Leftrightarrow A\subseteq B\wedge A\neq B.$$

若 A 不是 B 的真子集，则记作 $A\not\subset B$，其符号化形式为

$$A\not\subset B\Leftrightarrow \exists x(x\in A\wedge x\notin B)\vee(A=B).$$

设 A,B,C 为 3 个集合，从定义不难看出下面 3 个命题为真：

(1) $A\not\subset A$；

(2) 若 $A\subset B$，则 $B\not\subset A$；

(3) 若 $A\subset B$ 且 $B\subset C$，则 $A\subset C$.

定义 1.4 不拥有任何元素的集合称为**空集合**，简称为**空集**，记作 $\varnothing$[1].

$\{x\mid x^2+1=0\wedge x\in R\}$，$\{(x,y)\mid x^2+y^2<0\wedge x,y\in R\}$ 都是空集.

定理 1.1 空集是一切集合的子集.

证明 只要证明，对于任意的集合 A，均有 $\varnothing\subseteq A$ 成立，即证明 $\forall x(x\in\varnothing\rightarrow x\in A)$ 为真，这是显然的. ▌

推论 空集是唯一的.

证明 设 $\varnothing_1$ 与 $\varnothing_2$ 都是空集，由定理 1.1 可知

$$\varnothing_1\subseteq\varnothing_2\wedge\varnothing_2\subseteq\varnothing_1,$$

所以，$\varnothing_1=\varnothing_2$. ▌

由推论可知，空集无论以什么形式出现，它们都是相等的. 因而

$$\{x\mid x\neq x\}=\{x\mid x^2+1=0\wedge x\in R\}=\varnothing.$$

空集是一切集合的子集，从这个意义上看，可以形象地说：$\varnothing$ 是"最小"的集合. 有无最大的集合呢？回答是否定的，但当讨论某具体问题时，可以定义一个具有相对性的"最大"集合.

定义 1.5 如果限定所讨论的集合都是某一集合的子集，则称该集合为**全集**，常记为 E.

---

[1] $\varnothing$ 是丹麦字母，发音为"ugh".

从定义可以看出，全集的概念具有相对性. 例如，当我们讨论(a,b)区间上实数的性质时，可将(a,b)取为全集，当讨论$[0,+\infty)$上实数性质时，可将$[0,+\infty)$区间取成全集. 这说明全集是根据具体情况而决定的，因而具有相对性.

又容易发现，根据某一具体情况定义的全集是不唯一的. 讨论(a,b)区间上实数性质时，当然可以取(a,b)为全集，也可以取区间$[a,b)$，$(a,b]$，$(a,+\infty)$，实数集R等为全集. 又如，当讨论的集合都是$A=\{a,b,c\}$的子集时，可以取A为全集，也可以取$B=\{a,b,c,d\}$为全集，其实，可以取包含A的一切集合为全集，而A是所要求的全集中“最小”的全集，但找不到所要求的“最大”的全集.

给定若干个集合后，都可以找到包含它们的全集，因而在今后的讨论中，所涉及到的集合都可以看成某个全集E的子集.

定义 1.6 设A为一个集合，称由A的所有子集组成的集合为A的**幂集**，记作$P(A)$[1]. 用描述法表示为

$$P(A)=\{x \mid x\subseteq A\}.$$

为方便起见，本书中规定，$\varnothing$为**0 元集**，含1个元素的集合为**单元集**或**1 元集**，含2个元素的集合为**2 元集**，…，含n个元素的集合为**n 元集**$(n\geq 1)$. 用$|A|$表示A中的元素个数，当A中的元素个数为有限数时，A为**有限集**或**有穷集**[2].

为了求出给定集合A的幂集，首先求出A的由低到高元的所有子集，再将它们组成集合即可. 设$A=\{a,b,c\}$，求$P(A)$的步骤如下：

0 元子集为：$\varnothing$；

1 元子集为：$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$；

2 元子集为：$\{a,b\}$，$\{a,c\}$，$\{b,c\}$；

3 元子集为：$\{a,b,c\}=A$.

① 在概率论中，用$P(A)$表示事件A的概率，请读者注意区分. 有的书上用2^A表示A的幂集.

② 在本小节所给出的概念，在第九章还要给出严格的定义或表示法.

A 的幂集 $P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$.

从以上的讨论不难证明下面定理.

定理 1.2 设集合 A 的元素个数 $|A|=n$(n 为自然数),则 $|P(A)|=2^n$.

除了 $P(A)$ 这样由集合构成的集合外,在数学中还会遇到许多其他形式的由集合构成的集合,统称这样的集合为**集族**.若将集族中的集合都赋予记号,则可得带指标集的集族,见下面定义.

定义 1.7 设 $\mathscr{A}$ 为一个集族,S 为一个集合,若对于任意的 $\alpha\in S$,存在唯一的 $A_\alpha\in\mathscr{A}$ 与之对应,而且 $\mathscr{A}$ 中的任何集合都对应 S 中的某一元素,则称 $\mathscr{A}$ 是以 S 为指标集的**集族**,S 称为 $\mathscr{A}$ 的**指标集**.常记 $\mathscr{A}=\{A_\alpha|\alpha\in S\}$,或 $\mathscr{A}=\{A_\alpha\}_{\alpha\in S}$.

如果将 $\varnothing$ 看成集族,则称 $\varnothing$ 为**空集族**.

设 $A_1=\{x|x\in N\wedge x$ 为奇数$\}$,

$A_2=\{x|x\in N\wedge x$ 为偶数$\}$,

则 $\{A_1,A_2\}$ 是以 $\{1,2\}$ 为指标集的集族.

设 p 为一素数,$A_k=\{x|x\equiv k(\mathrm{mod}\ p)\}$,$k=0,1,\cdots,p-1$,则 $\mathscr{A}=\{A_0,A_1,\cdots,A_{p-1}\}$ 是以 $\{0,1,2,\cdots,p-1\}$ 为指标集的集族,也可以记为 $\mathscr{A}=\{A_k|k\in\{0,1,\cdots,p-1\}\}$,或 $\mathscr{A}=\{A_k\}_{k\in\{0,1,2,\cdots,p-1\}}$.

设 $A_n=\{x|x\in N\wedge x=n\}$,则 $\mathscr{A}=\{A_n|n\in N\}$ 是以 N 为指标集的集族,集族中的元素为以各自然数为元素的单元集.

令 $N_+=N-\{0\}$,设 $A_n=\{x|0\leqslant x<\frac{1}{n}\wedge n\in N_+\}$,则 $\mathscr{A}=\{A_n|n\in N_+\}$ 是以 N_+ 为指标集的集族,其元素为半开半闭区间 $[0,\frac{1}{n})$,$n=1,2,\cdots$.

在本节结束之前,略谈一下多重集合的概念.前面谈到的集合都是由不同对象(元素)组成的.某元素在集合中无论重复出现多少次,仍看成是一个元素.而在实际中,某一元素的重复出现往往

表达了某种实际意义. 例如,在某项工程中所需要的工程技术人员的种类可用集合 $A=\{$电机工程师,机械工程师,数学家,制图员,程序员$\}$表示,但从集合 A 看不出所需要人员的数量. 于是引出多重集合的概念.

设全集为 E,E 中元素可以不止一次在 A 中出现的集合 A,称为**多重集合**. 若 E 中元素 a 在 A 中出现 $k(k\geqslant 0)$次,则称 a 在 A 中的**重复度**为 k.

设全集 $E=\{a,b,c,d,e\}$,$A=\{a,a,b,b,c\}$为多重集合,其中 a,b 的重复度为 2,c 的重复度为 1,而 d,e 的重复度均为 0.

其实,集合可看成是各元素重复度均小于等于 1 的多重集合.

在图论等课程中用到多重集合的概念. 本书集合论部分只讨论集合而不讨论多重集合,因而谈到集合都不是多重集合,集合中的元素是各不相同的.

§1.2 集合的运算

给定两个集合 A,B,除了关心 A,B 之间是否有包含或相等的关系外,有时还要讨论至少属于 A,B 之一的元素组成的集合,或既属于 A 又属于 B 的全体元素组成的集合,以及属于 A 而不属 B 的全体元素组成的集合等,这些新的集合是通过集合的并、交、补等基本运算产生的.

定义 1.8 设 A,B 为二集合,称由 A 和 B 的所有元素组成的集合为 A 与 B 的**并集**,记作 $A\cup B$,称$\cup$为**并运算符**. $A\cup B$ 的描述法表示如下:

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\vee x\in B\}.$$

设

$$A=\{x\mid x\in N\wedge 5\leqslant x\leqslant 10\},$$
$$B=\{x\mid x\in N\wedge x\leqslant 10\wedge x \text{ 为素数}\},$$

则

$$A\cup B=\{2,3,5,6,7,8,9,10\}.$$

可以将集合的并运算推广到有限个或可数个集合[①]. 设 A_1, $A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个集合,

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\{x\mid \exists i(1\leqslant i\leqslant n\wedge x\in A_i)\},$$

简记为

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i.$$

类似地,对于可数个集合 $A_1,A_2,\cdots$,记

$$A_1\cup A_2\cup\cdots=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$$

为其并集.

设

$$A_n=\{x\mid x\in R\wedge n-1\leqslant x\leqslant n\},n=1,2,\cdots,10,$$

则

$$\bigcup_{n=1}^{10}A_n=\{x\mid x\in R\wedge 0\leqslant x\leqslant 10\}=[0,10].$$

设

$$A_n=\{x\mid x\in R\wedge 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{n}\},n=1,2,\cdots,$$

则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\{x\mid x\in R\wedge 0\leqslant x\leqslant 1\}=[0,1].$$

定义 1.9 设 A,B 为二集合,称由 A 和 B 的公共元素组成的集合为 A 与 B 的**交集**,记作 $A\cap B$,称 $\cap$ 为**交运算符**. $A\cap B$ 的描述法表示为

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\wedge x\in B\}.$$

设

$$A=\{x\mid x\in N\wedge x \text{为奇数}\wedge 0\leqslant x\leqslant 20\},$$
$$B=\{x\mid x\in N\wedge x \text{为素数}\wedge 0\leqslant x\leqslant 20\},$$

---

① 有限和可数集的定义在第四章介绍.

则

$$A\cap B=\{3,5,7,11,13,17,19\}.$$

同并运算类似，可以将集合的交推广到有限个或可数个集合：

$$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=\bigcap_{i=1}^{n}A_i=\{x\mid\forall i(1\leqslant i\leqslant n\to x\in A_i)\}.$$

类似定义

$$A_1\cap A_2\cap\cdots=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n.$$

设

$$A_n=\{x\mid x\in R\land 0\leqslant x\leqslant n\},n=1,2,\cdots,$$

则

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\{x\mid x\in R\land 0\leqslant x\leqslant 1\}=[0,1].$$

定义 1.10 设 A,B 为二集合，若 $A\cap B=\varnothing$，则称 A,B 是**不交的**，设 $A_1,A_2,\cdots$ 是可数个集合，若对于任意的 $i\neq j$，均有 $A_i\cap A_j=\varnothing$，则称 $A_1,A_2,\cdots$ 是**互不相交的**.

设

$$A_n=\{x\mid x\in R\land n-1<x<n\},n=1,2,\cdots,$$

则 $A_1,A_2,\cdots$ 是互不相交的.

定义 1.11 设 A,B 为二集合，称属于 A 而不属于 B 的全体元素组成的集合为 B 对 A 的**相对补集**，记作 $A-B$，称 $-$ 为**相对补运算符**. $A-B$ 的描述法表示为

$$A-B=\{x\mid x\in A\land x\notin B\}.$$

定义 1.12 设 A,B 为二集合，称属于 A 而不属于 B，或属于 B 而不属于 A 的全体元素组成的集合为 A 与 B 的**对称差**，记作 $A\oplus B$，称 $\oplus$ 为**对称差运算符**. $A\oplus B$ 的描述法表示为

$$A\oplus B=\{x\mid(x\in A\land x\notin B)\lor(x\notin A\land x\in B)\}.$$

容易看出，$A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$.

定义 1.13 设 E 为全集，$A\subseteq E$，称 A 对 E 的相对补集为 A 的**绝对补集**，并将 $E-A$ 简记为 $\sim A$，称 $\sim$ 为**绝对补运算符**. $\sim A$ 的描述法表示为

$$\sim A = \{x \mid x \in E \land x \notin A\}.$$

因为 E 是全集,所以 $x \in E$ 是真命题,于是

$$\sim A = \{x \mid x \notin A\}.$$

设

$A = \{x \mid x \in R \land 0 \leqslant x < 2\}$, $B = \{x \mid x \in R \land 1 \leqslant x < 3\}$,

则,

$$A - B = \{x \mid x \in R \land 0 \leqslant x < 1\} = [0,1)$$

$$B - A = \{x \mid x \in R \land 2 \leqslant x < 3\} = [2,3)$$

$$A \oplus B = \{x \mid x \in R \land (0 \leqslant x < 1 \lor 2 \leqslant x < 3)\} = [0,1) \cup [2,3).$$

当将实数集 R 作为全集时,

$$\sim A = \{x \mid x \in R \land (-\infty < x < 0 \lor 2 < x < +\infty)\}$$

$$= (-\infty, 0) \cup [2, +\infty).$$

以上定义了集合的并、交、补运算,还可以将并、交运算推广到集族上.

定义 1.14 设 $\mathscr{A}$ 为一个集族,称由 $\mathscr{A}$ 中全体元素的元素组成的集合为 $\mathscr{A}$ 的**广义并集**,记作 $\bigcup \mathscr{A}$,称 $\bigcup$ 为**广义并运算符**,读作"大并". $\bigcup \mathscr{A}$ 的描述法表示为

$$\bigcup \mathscr{A} = \{x \mid \exists z(z \in \mathscr{A} \land x \in z)\}.$$

设

$$\mathscr{A} = \{\{a,b\},\{c,d\},\{d,e,f\}\}.$$

则,

$$\bigcup \mathscr{A} = \{a,b,c,d,e,f\}.$$

当 $\mathscr{A}$ 是以 S 为指标集的集族时,

$$\bigcup \mathscr{A} = \bigcup \{A_\alpha \mid \alpha \in S\} = \bigcup_{\alpha \in S} A_\alpha.$$

定义 1.15 设 $\mathscr{A}$ 为非空的集族,称由 $\mathscr{A}$ 中全体元素的公共元素组成的集合为 $\mathscr{A}$ 的**广义交集**,记作 $\bigcap \mathscr{A}$,称 $\bigcap$ 为**广义交运算符**,读作"大交". $\bigcap \mathscr{A}$ 的描述法表示为

$$\bigcap \mathscr{A} = \{x \mid \forall z(z \in \mathscr{A} \to x \in z)\}.$$

设

$$\mathscr{A}=\{\{1,2,3\},\{1,a,b\},\{1,6,7\}\},$$

则

$$\bigcap\mathscr{A}=\{1\}.$$

当 $\mathscr{A}$ 是以 S 为指标集的集族时，

$$\bigcap\mathscr{A}=\bigcap\{A_\alpha\mid\alpha\in S\}=\bigcap_{\alpha\in S}A_\alpha.$$

另外，在广义并与广义交的运算中，将集族中的元素仍看成集族，给定下列集族：

$$\mathscr{A}_1=\{a,b,\{c,d\}\},\quad \mathscr{A}_2=\{\{a,b\}\},\quad \mathscr{A}_3=\{a\},$$

$$\mathscr{A}_4=\{\varnothing,\{\varnothing\}\},\quad \mathscr{A}_5=a\ (a\neq\varnothing),\quad \mathscr{A}_6=\varnothing.$$

不难看出，它们的广义并集和广义交集分别为：

$$\bigcup\mathscr{A}_1=a\cup b\cup\{c,d\},\qquad \bigcap\mathscr{A}_1=a\cap b\cap\{c,d\},$$

$$\bigcup\mathscr{A}_2=\{a,b\},\qquad \bigcap\mathscr{A}_2=\{a,b\},$$

$$\bigcup\mathscr{A}_3=a,\qquad \bigcap\mathscr{A}_3=a,$$

$$\bigcup\mathscr{A}_4=\{\varnothing\},\qquad \bigcap\mathscr{A}_4=\varnothing,$$

$$\bigcup\mathscr{A}_5=\bigcup a,\qquad \bigcap\mathscr{A}_5=\bigcap a,$$

$$\bigcup\mathscr{A}_6=\varnothing,\qquad \bigcap\mathscr{A}_6\ 无意义.$$

相对于广义并和广义交的概念来说，我们将定义 1.8 和定义 1.9 中给出的并和交分别称为**初级并**和**初级交**. 为了规定运算的优先级，将以上各种运算(将求集合的幂集也看成运算)分成两类，其中的绝对补、求幂集、广义并、广义交为第 1 类运算，而将初级并、初级交、相对补、对称差等运算称为第 2 类运算. 在第 1 类运算中，按由右向左的顺序进行，在第 2 类运算中，顺序往往由括号[1]来决定，多个括号并排或无括号部分按由左向右的顺序进行.

集合与集合之间的关系以及一些运算结果可用文氏图给予直观的描述. 在文氏图中，用矩形代表全集，用圆或其他闭曲线的内部代表 E 的子集，并将运算结果得到的集合用阴影部分表示. 需

[1] 本书中的括号均为圆括号.

要注意的是，文氏图只是对某些集合之间的关系及运算结果给出一种直观而形象的示意性的表示，而不能用来证明集合等式及包含关系.

集合的运算和文氏图的结合，可以应用到有限集合的计数问题中去. 用归纳法容易证明下面定理.

定理 1.3 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 n 个集合，则

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j|$$

$$+ \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n| .$$

此定理称为**包含排斥原理**，简称**容斥原理**[1].

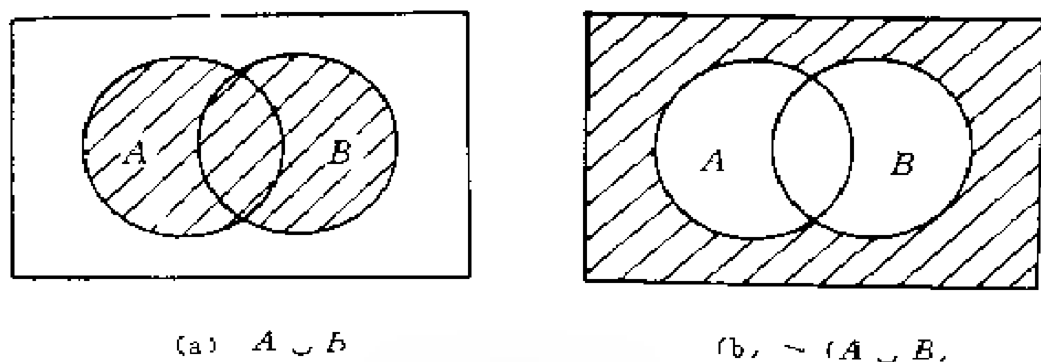
【例 1.1】 在 1 到 10000 之间既不是某个整数的平方，也不是某个整数的立方的数有多少个?

解 设全集 $E = \{x \mid x \in N \land 1 \leqslant x \leqslant 10000\}$，

$A = \{x \mid x \in E \land x$ 是某个整数的平方$\}$，

$B = \{x \mid x \in E \land x$ 是某个整数的立方$\}$.

$A \cup B$ 的文氏图为图 1.1 中(a)所示，$\sim(A \cup B)$ 的文氏图为(b)所



(a) $A \cup B$ (b) $\sim(A \cup B)$

图 1.1

示. 为了求 $|\sim(A \cup B)|$，首先求 $|A \cup B|$. 由容斥原理可知:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| .$$

而 $|A| = 100$，$|B| = 21$，$|A \cap B| = 4$($A \cap B$ 的 4 个元素为 1，64，

[1] 在组合数学中"还将"进一步讨论容斥原理

729 和 4096)，于是

$$|A\cup B| = 100 + 21 - 4 = 117,$$

$$|\sim(A\cup B)| = 10000 - 117 = 9883.$$

【例 1.2】 对 24 名科技人员进行掌握外语情况的调查，其统计资料如下：会说英、日、德、法语的人数分别为 13，5，10 和 9. 其中同时会说英语、日语的人数为 2. 同时会说英语、德语、或同时会说英语、法语，或同时会说德语、法语两种语言的人数均为 4. 会说日语的人既不会说法语也不会德语. 试求只会说一种语言的人数各为多少？又同时会说英、德、法语的人数为多少？

解 设 A、B、C、D 分别为会说英、日、德、法语的集合. 由已知条件可知：

$|A| = 13$，$|B| = 5$，$|C| = 10$，$|D| = 9$，$|A\cap B| = 2$，而 $|A\cap C| = |A\cap D| = |C\cap D| = 4$，$|B\cap C| = |B\cap D| = |A\cap B\cap C| = |A\cap B\cap D| = |B\cap C\cap D| = |A\cap B\cap C\cap D| = 0$，$|A\cup B\cup C\cup D| = 24$.

对集合 A，B，C，D 应用容斥原理，并代入已知条件得方程

$$24 = 37 - 14 + |A\cap C\cap D|.$$

于是，$|A\cap C\cap D| = 1$，这说明同时会说英、德、法语的只有 1 人.

设只会说英、日、德、法语的人数分别为 x_1，x_2，x_3，x_4，则

$$x_1 = |A| - |(B\cup C\cup D)\cap A|$$

$$= |A| - |(B\cap A)\cup(C\cap A)\cup(D\cap A)|$$

对 $B\cap A$，$C\cap A$，$D\cap A$ 应用容斥原理，得

$$x_1 = 4.$$

类似地可求出：$x_2 = 3$，$x_3 = 3$，$x_4 = 2$.

§1.3 基本的集合恒等式

在上节里介绍了基本的集合运算，这些运算都满足一定的性质，对于集合的初级并、初级交、相对补、绝对补等的运算性质在这

里一并给出，它们都是基本的集合恒等式，在集合演算中均起很重要的作用，用这些基本的集合恒等式可以推导出许多新的集合等式和包含式.

设 E 为全集，A,B,C 为 E 的任意子集，则下面列出的运算规律成立：

(1) **等幂律** $A\cup A=A$；$A\cap A=A$.

(2) **交换律** $A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$.

(3) **结合律** $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

(4) **分配律** $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；

(5) **德・摩根律**

绝对形式 $\sim(A\cup B)=\sim A\cap\sim B$；

$\sim(A\cap B)=\sim A\cup\sim B$；

相对形式 $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$；

$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$.

(6) **吸收律** $A\cup(A\cap B)=A$；$A\cap(A\cup B)=A$.

(7) **零律** $A\cup E=E$；$A\cap\varnothing=\varnothing$.

(8) **同一律** $A\cup\varnothing=A$；$A\cap E=A$.

(9) **排中律** $A\cup\sim A=E$.

(10) **矛盾律** $A\cap\sim A=\varnothing$.

(11) **全补律** $\sim\varnothing=E$；$\sim E=\varnothing$.

(12) **双重否定律** $\sim(\sim A)=A$.

(13) **补交转换律** $A-B=A\cap\sim B$.

常称以上 13 组集合等式为**集合恒等式**. 它们的正确性均可由相应的命题等值式证明，即由定义证明. 有的恒等式也可由其他恒等式证明.

另外，还应该指出，有些运算规律如交换律、结合律、分配律、德・摩根律、吸收律等可以推广到集族的情况. 设 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in S}$ 为集族，

B 为一集合，则分配律的形式为：

$$B\cup(\bigcap\{A_\alpha\}_{\alpha\in S})=\bigcap_{\alpha\in S}(B\cup A_\alpha),$$

$$B\cap(\bigcup\{A_\alpha\}_{\alpha\in S})=\bigcup_{\alpha\in S}(B\cap A_\alpha).$$

而德·摩根律的形式为：

$$\sim\bigcup\{A_\alpha\}_{\alpha\in S}=\bigcap_{\alpha\in S}\sim A_\alpha;$$

$$\sim\bigcap\{A_\alpha\}_{\alpha\in S}=\bigcup_{\alpha\in S}\sim A_\alpha;$$

$$B-\bigcup\{A_\alpha\}_{\alpha\in S}=\bigcap_{\alpha\in S}(B-A_\alpha);$$

$$B-\bigcap\{A_\alpha\}_{\alpha\in S}=\bigcup_{\alpha\in S}(B-A_\alpha).$$

下面举例说明推导集合等式和包含式的过程. 如果是由定义证明集合等式和包含式，则将尽量地采取一阶谓词逻辑的演算规则进行演算，但不可能是完全形式化的推导，因而就称采用的方法为半形式化的方法，请见下面例题.

【例 1.3】 由定义证明下面的恒等式：

(1) 分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cap C)$；

(2) 零律：$A\cap\varnothing=\varnothing$；

(3) 排中律：$A\cup\sim A=E$.

证明 (1) 对于任意的 x，

$x\in A\cup(B\cap C)$

$\Leftrightarrow x\in A\vee x\in(B\cap C)$

$\Leftrightarrow x\in A\vee(x\in B\wedge x\in C)$

$\Leftrightarrow (x\in A\vee x\in B)\wedge(x\in A\vee x\in C)$ （命题逻辑分配律）

$\Leftrightarrow x\in(A\cup B)\wedge x\in(A\cup C)$

$\Leftrightarrow x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

所以，$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

(2) 对于任意的 x，

$x\in A\cap\varnothing$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge x\in\varnothing$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge 0$

$\Leftrightarrow 0$ （命题逻辑零律）

所以，$x\in A\cap\varnothing$ 为假命题，即 $A\cap\varnothing$ 中无元素，因而 $A\cap\varnothing=\varnothing$.

(3) 对于任意的 x，

$x\in A\cup\sim A$

$\Leftrightarrow x\in A\vee x\in\sim A$

$\Leftrightarrow x\in A\vee x\notin A$

$\Leftrightarrow x\in A\vee \neg x\in A$

$\Leftrightarrow 1$ （命题逻辑排中律）

$\Leftrightarrow x\in E$，

因而，$A\cup\sim A=E$. ▌

【例 1.4】 用其他的恒等式证明吸收律.

证明 $A\cup(A\cap B)$

$=(A\cap E)\cup(A\cap B)$ （同一律）

$=A\cap(E\cup B)$ （分配律）

$=A\cap E$ （零律）

$=A.$ （同一律）

由同一律、分配律、零律等规律证明了吸收律第一式. 而

$A\cap(A\cup B)$

$=(A\cap A)\cup(A\cap B)$ （分配律）

$=A\cup(A\cap B)$ （等幂律）

$=A.$ （由第一式）

这就证明了吸收律的第二式.

请读者由定义证明吸收律. ▌

【例 1.5】 证明补交转换律

$$A-B=A\cap\sim B.$$

证明 对于任意的 x，

$x\in A-B$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge x\in\sim B$

$\Leftrightarrow x\in A\cap\sim B$

所以，$A-B=A\cap\sim B$. ▌

补交转换律将补运算转换成交运算，从而可以使用交运算的运算规律.

【例 1.6】 证明德·摩根律的相对形式：

(1) $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$;

(2) $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$.

证明 (1)

$$
\begin{aligned}
& A-(B\cup C) & \\
=\ & A\cap\sim(B\cup C) & \text{（补交转换律）}\\
=\ & A\cap(\sim B\cap\sim C) & \text{（德·摩根律绝对形式）}\\
=\ & (A\cap A)\cap(\sim B\cap\sim C) & \text{（等幂律）}\\
=\ & (A\cap\sim B)\cap(A\cap\sim C) & \text{（交换律、结合律）}\\
=\ & (A-B)\cap(A-C) & \text{（补交转换律）}
\end{aligned}
$$

类似可证(2). ▌

【例 1.7】 证明对称差运算满足以下规律：

(1) 交换律：$A\oplus B=B\oplus A$;

(2) 结合律：$A\oplus(B\oplus C)=(A\oplus B)\oplus C$;

(3) 分配律：$A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$;

(4) $A\oplus\varnothing=A$; $A\oplus E=\sim A$;

(5) $A\oplus A=\varnothing$; $A\oplus\sim A=E$.

其中，E 为全集.

证明 由定义易证(1)，(4)，(5). 下面只证(2)和(3).

(2) 由补交转换律可知：

$$
\begin{aligned}
A\oplus B &= (A-B)\cup(B-A)\\
&= (A\cap\sim B)\cup(B\cap\sim A)\\
&= (A\cap\sim B)\cup(\sim A\cap B). \qquad (*)
\end{aligned}
$$

在(2)的证明中用到这个结果(*).

首先从(2)的左端演算：

$$A\oplus(B\oplus C)$$
$$=(A\cap\sim(B\oplus C))\cup(\sim A\cap(B\oplus C))$$
（第一次用(*)）
$$=(A\cap\sim((B\cap\sim C)\cup(\sim B\cap C)))$$
$$\cup(\sim A\cap((B\cap\sim C)\cup(\sim B\cap C)))$$
（第二次用(*)）
$$=(A\cap((\sim B\cup C)\cap(B\cup\sim C)))$$
$$\cup((\sim A\cap B\cap\sim C)\cup(\sim A\cap\sim B\cap C))$$
$$=(A\cap((\sim B\cap B)\cup(\sim B\cap\sim C)\cup(B\cap C)\cup(C\cap\sim C)))$$
$$\cup(\sim A\cap B\cap\sim C)\cup(\sim A\cap\sim B\cap C)$$
$$=(A\cap\sim B\cap\sim C)\cup(A\cap B\cap C)$$
$$\cup(\sim A\cap B\cap\sim C)\cup(\sim A\cap\sim B\cap C).$$

再看(2)的右端：

$$(A\oplus B)\oplus C=C\oplus(A\oplus B)\qquad\text{（交换律）}$$

由左端的演算结果可知：

$$C\oplus(A\oplus B)$$
$$=(C\cap\sim A\cap\sim B)\cup(C\cap A\cap B)$$
$$\cup(\sim C\cap A\cap\sim B)\cup(\sim C\cap\sim A\cap B)$$
$$=(\sim A\cap\sim B\cap C)\cup(A\cap B\cap C)$$
$$\cup(A\cap\sim B\cap\sim C)\cup(\sim A\cap B\cap\sim C).$$

对照两端演算结果可知

$$A\oplus(B\oplus C)=(A\oplus B)\oplus C.$$

(3) 从右边开始演算：

$$(A\cap B)\oplus(A\cap C)$$
$$=((A\cap B)\cap\sim(A\cap C))\cup(\sim(A\cap B)\cap(A\cap C))$$
（用(*)）
$$=(A\cap B\cap\sim A)\cup(A\cap B\cap\sim C)\cup(\sim A\cap A\cap C)$$
$$\cup(\sim B\cap A\cap C)$$

$=(A\cap B\cap\sim C)\cup(A\cap\sim B\cap C)$

$=A\cap((B\cap\sim C)\cup(\sim B\cap C))$

$=A\cap(B\oplus C)$. ▌

【例 1.8】 设 $\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$ 为集族，试证明：

(1) 若 $\mathscr{A}\subset\mathscr{B}$，则 $\bigcup\mathscr{A}\subseteq\bigcup\mathscr{B}$

(2) 若 $\mathscr{A}\in\mathscr{B}$，则 $\mathscr{A}\subset\bigcup\mathscr{B}$；

(3) 若 $\mathscr{A}\neq\varnothing$ 且 $\mathscr{A}\subset\mathscr{B}$，则 $\bigcap\mathscr{B}\subset\bigcap\mathscr{A}$；

(4) 若 $\mathscr{A}\in\mathscr{B}$，则 $\bigcap\mathscr{B}\subset\mathscr{A}$；

(5) 若 $\mathscr{A}\neq\varnothing$，则 $\bigcap\mathscr{A}\subseteq\bigcup\mathscr{A}$.

证明 (1) 对于任意的 x，

$x\in\bigcup\mathscr{A}$

$\Leftrightarrow\exists A(A\in\mathscr{A}\wedge x\in A)$

$\Rightarrow\exists A(A\in\mathscr{B}\wedge x\in A)$ $\quad(\mathscr{A}\subset\mathscr{B})$

$\Leftrightarrow x\in\bigcup\mathscr{B}$.

所以，$\bigcup\mathscr{A}\subset\bigcup\mathscr{B}$.

(2) 若 $\mathscr{A}\in\mathscr{B}$，由广义并集定义可知 $\mathscr{A}\subseteq\bigcup\mathscr{B}$.

(3) 由于 $\mathscr{A}\neq\varnothing$，所以 $\mathscr{B}\neq\varnothing$，故 $\bigcap\mathscr{A}$ 与 $\bigcap\mathscr{B}$ 均有意义. 对于任意的 x

$x\in\bigcap\mathscr{B}$

$\Leftrightarrow\forall y(y\in\mathscr{B}\rightarrow x\in y)$

$\Rightarrow\forall y(y\in\mathscr{A}\rightarrow x\in y)$ $\quad(\mathscr{A}\subset\mathscr{B})$

$\Leftrightarrow x\in\bigcap\mathscr{A}$.

所以，$\bigcap\mathscr{B}\subset\bigcap A$.

(4)，(5) 的证明较简单，请读者自己完成. ▌

【例 1.9】 集合幂集运算具有下列性质：

(1) $A\subseteq B$ 当且仅当 $P(A)\subseteq P(B)$；

(2) $P(A)\cup P(B)\subset P(A\cup B)$；

(3) $P(A\cap B)=P(A)\cap P(B)$；

(4) $P(A\quad B)\subset(P(A)-P(B))\cup\{\varnothing\}$.

证明 (1) 先证必要性. 对于任意的 x,

$$
\begin{aligned}
& x\in P(A) \\
\Leftrightarrow\ & x\subseteq A \\
\Rightarrow\ & x\subseteq B \qquad\qquad (A\subseteq B) \\
\Leftrightarrow\ & x\in P(B).
\end{aligned}
$$

故有 $P(A)\subseteq P(B)$.

再证充分性. 对于任意的 y,

$$
\begin{aligned}
& y\in A \\
\Leftrightarrow\ & \{y\}\in P(A) \\
\Rightarrow\ & \{y\}\in P(B) \qquad\qquad (P(A)\subseteq P(B)) \\
\Leftrightarrow\ & y\in B.
\end{aligned}
$$

所以, $A\subseteq B$.

(2) 对于任意的 x,

$$
\begin{aligned}
& x\in P(A)\cup P(B) \\
\Leftrightarrow\ & x\in P(A)\vee x\in P(B) \\
\Leftrightarrow\ & x\subseteq A\vee x\subseteq B \\
\Rightarrow\ & x\subseteq A\cup B \\
\Leftrightarrow\ & x\in P(A\cup B).
\end{aligned}
$$

所以, $P(A)\cup P(B)\subseteq P(A\cup B)$.

(3) 对于任意的 x,

$$
\begin{aligned}
& x\in P(A\cap B) \\
\Leftrightarrow\ & x\subseteq A\cap B \\
\Leftrightarrow\ & x\subseteq A\wedge x\subseteq B \\
\Leftrightarrow\ & x\in P(A)\wedge x\in P(B) \\
\Leftrightarrow\ & x\in P(A)\cap P(B).
\end{aligned}
$$

所以, $P(A\cap B)=P(A)\cap P(B)$.

(4) 对于任意的集合 x,

若 $x=\varnothing$, 则 $x\in P(A\quad B)$ 且 $x\in(P(A)\quad P(B))\cup\{\varnothing\}$. 若 $x\neq\varnothing$,

$$\begin{aligned}
& x \in P(A-B) \\
\Longleftrightarrow\ & x \subseteq A - B \\
\Rightarrow\ & x \subseteq A \wedge x \nsubseteq B \\
\Longleftrightarrow\ & x \in P(A) \wedge x \notin P(B) \\
\Longleftrightarrow\ & x \in (P(A) - P(B)).
\end{aligned}$$

综上所述，可知

$$P(A-B) \subseteq (P(A) - P(B)) \cup \{\varnothing\}. \quad ∎$$

§1.4 集合列的极限

我们可以将数列的极限这一进行无限运算的工具移植到集合论中来.

若集族$\{A_\alpha\}_{\alpha\in S}$的指标集 S 为 N_+，则称集族$\{A_k\}_{k\in N_+}$为**集合列**，简记为$\{A_k\}$.

设$\{A_n\}$为一个给定的集合列，首先考虑由属于集合列中无限个集合的元素组成的集合，以及由只不属于集合列中有限个集合的元素组成的集合. 这样的集合定义如下.

定义 1.16 设$\{A_k\}$为一集合列.

称$\{x \mid \forall n(n \in N_+ \rightarrow \exists k(k \in N_+ \wedge k \geqslant n \wedge x \in A_k))\}$为$\{A_k\}$的**上极限集**，简称**上极限**，记作

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} A_k.$$

称$\{x \mid \exists n_0(n_0 \in N_+ \wedge \forall k(k \in N_+ \wedge k \geqslant n_0 \rightarrow x \in A_k))\}$为$\{A_k\}$的**下极限集**，简称**下极限**，记作

$$\underline{\lim_{k\to\infty}} A_k.$$

当 $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k = \underline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k$ 时，称之为$\{A_k\}$的**极限集**，简称**极限**，记作

$$\lim_{k\to\infty} A_k.$$

若$\{A_k\}$有极限，则称$\{A_k\}$是收敛的.

从定义不难看出，$\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, A_k$ 中元素属于$\{A_k\}$中无限个集合，而 $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, A_k$ 中元素除可能不属于$\{A_k\}$中有限个集合外，属于$\{A_k\}$中所有集合，因而必存在正整数 n_0，使得 $k\geqslant n_0$ 后，$\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, A_k$ 中任意的元素 x，有 $x\in A_k$，有时称 $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, A_k$ 中元素属于几乎所有的$\{A_k\}$中元素.

【例 1.10】 设 S_1, S_2 为两个集合，作集合列如下：

$$A_k=\begin{cases} S_1, & k \text{ 为奇数}, \\ S_2, & k \text{ 为偶数}, \end{cases} \quad k=1,2,\cdots,$$

讨论$\{A_k\}$的收敛情况.

解 易知，$\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, A_k=S_1\cup S_2$，$\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, A_k=S_1\cap S_2$. 当 $S_1=S_2$ 时，$\{A_k\}$收敛于 $S_1(=S_2)$，否则不收敛.

【例 1.11】 设在集合列$\{A_k\}$中，$A_k=[0,k]$，讨论$\{A_k\}$的收敛情况.

解 从定义可知，

$\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, A_k=\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, A_k=[0,+\infty)$，所以$\{A_k\}$收敛，并且 $\lim\limits_{k\to\infty} A_k=[0,+\infty)$.

【例 1.12】 在集合列$\{A_k\}$中，

$$\begin{cases} A_{2k+1}=\left[0,2-\dfrac{1}{2k+1}\right], \\ A_{2k}=\left[0,1+\dfrac{1}{2k}\right], \end{cases} \quad k=1,2,\cdots.$$

确定$\{A_k\}$的上、下极限.

解 将实数集 R 分成 4 个区间：$S_1=(-\infty,0)$，$S_2=[0,1]$，$S_3=(1,2)$，$S_4=[2,+\infty)$. 此时 $S_1\cap A_k=\varnothing$，$S_4\cap A_k=\varnothing$，$S_2\subseteq A_k$，$k=1,2,\cdots$. 而对于任意的 $x\in S_3$，必存在 $k_0(x)$，使得当 $k\geqslant k_0(x)$

后，有

$$1+\frac{1}{2k}<x<2-\frac{1}{2k-1},$$

即，当 $k\geqslant k_0(x)$ 后，有 $x\in A_{2k-1}$，而 $x\notin A_{2k}$. 因而对于任意的 $x\in S_3=(1,2)$，$\{A_k\}$ 有无限多个集合含 x，又有无限个多个集合不含 x，于是

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} A_k=S_2\cup S_3=[0,2),$$

$$\underline{\lim_{k\to\infty}} A_k=S_2=[0,1].$$

以上结果说明 $\{A_k\}$ 不收敛.

定理 1.4 设 $\{A_k\}$ 为集合列，则

(1) $\underline{\lim_{k\to\infty}} A_k\subset \overline{\lim_{k\to\infty}} A_k$;

(2) $\overline{\lim_{k\to\infty}} A_k=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$;

(3) $\underline{\lim_{k\to\infty}} A_k=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$.

证明 由定义可知，(1) 的成立是显然的，下面证明(2). 首先证明 $\overline{\lim_{k\to\infty}} A_k\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. 对于任意的 $x\in\overline{\lim_{k\to\infty}} A_k$，$\{A_k\}$ 中存在无限个集合

$$A_{k_1},A_{k_2},\cdots$$

含 x，其中 $k_1<k_2<\cdots$. 因而，对于任意的 $n\in N_+$ 存在 k_n，使得 $x\in A_{k_n}\subset\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. 因而

$$x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

反之，对于任意的 $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$，必有

$$x\in\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k,\quad n=1,2,\cdots.$$

又必存在 k_n，使得 $x\in A_{k_n}$，$n=1,2,\cdots$，于是 x 属于 $\{A_k\}$ 中无限个

集合，所以

$$x \in \overline{\lim_{k\to\infty}} A_k.$$

类似可证(3)的成立. ▌

定理 1.5 设$\{A_k\}$为一集合列，B 为一集合，则

(1) $B - \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k = \underline{\lim\limits_{k\to\infty}} (B - A_k)$；

(2) $B - \underline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} (B - A_k)$.

证明 (1)

$$\begin{aligned} B - \overline{\lim_{k\to\infty}} A_k &= B - \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k && \text{(定理 1.4)} \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty}\Big(B - \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\Big) && \text{(德・摩根律)} \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}(B - A_k) && \text{(德・摩根律)} \\ &= \underline{\lim_{k\to\infty}} (B - A_k). && \text{(定理 1.4)} \end{aligned}$$

类似可证明(2). ▌

设$\{A_k\}$为一个集合列，令 $E = \bigcup\limits_{k\in \mathbf{N}_+} A_k$ 为全集，$B_k = \sim A_k$，$k = 1,2,\cdots$，则$\{B_k\}$也为一集合列. $\{A_k\}$，$\{B_k\}$的上极限和下极限有下面定理给出的关系.

定理 1.6 $E = \underline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k \cup \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} B_k = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k \cup \underline{\lim\limits_{k\to\infty}} B_k$.

证明 首先证明 $E \subset \underline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k \cup \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} B_k$.

对于任意的 $x \in E = \bigcup\limits_{k\in \mathbf{N}_+} A_k$ 只有下面两种可能：

(1) x 属于几乎所有的 A_k，即存在 $n_0(x)$，使得当 $k \geqslant n_0(x)$ 时，$x \in A_k$，于是 $x \in \underline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k$.

(2) (1)不成立时，必有无限个$\{A_k\}$中集合，不含 x，因而必

有无限个$\{B_k\}$中集合含 x,因而必有 $x\in \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k$.

由(1)或(2)的成立可知,$x\in \underline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k\cup \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} B_k$,即

$$E\subset \underline{\lim_{k\to\infty}} A_k\cup \overline{\lim_{k\to\infty}} B_k.$$

反之,由于 $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k\subset E$,且 $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} B_k\subset E$,因而

$$\underline{\lim_{k\to\infty}} A_k\cup \overline{\lim_{k\to\infty}} B_k\subset E.$$

综上所述,$E=\underline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k\cup \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} B_k$ 成立.

类似可证 $E=\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k\cup \underline{\lim\limits_{k\to\infty}} B_k$. ∎

定义 1.17 设$\{A_k\}$为一个集合列. 若

$$A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_k\supset\cdots,$$

则称$\{A_k\}$为**递减集合列**. 若

$$A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_k\subset\cdots,$$

则称$\{A_k\}$为**递增集合列**. 递减和递增集合列统称为**单调集合列**.

容易证明,单调集合列的极限总是存在的,并且,若$\{A_k\}$是递减的,则

$$\lim_{k\to\infty} A_k=\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

若$\{A_k\}$是递增的,则

$$\lim_{k\to\infty} A_k=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

例如,设 $A_k=(k,\infty)$,$k=1,2,\cdots$,则$\{A_k\}$是递减集合列,$\lim\limits_{k\to\infty} A_k=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n=\varnothing$.

又设 $A_k=[0,k)$,$k=1,2,\cdots$,则$\{A_k\}$是递增集合列,$\lim\limits_{k\to\infty} A_k=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n=[0,+\infty)$.

习　题　一

1. 用列举法表示下列集合.

(1) 偶素数集合；

(2) 1至200的整数中完全平方数集合；

(3) 1至100的整数中完全立方数集合；

(4) 非负整数集合；

(5) 24的素因子集合；

(6) 英文字母集合.

2. 用描述法表示下列各集合.

(1) 平面直角坐标系中单位圆内的点集；

(2) 正切为1的角集；

(3) 八进制数字集合；

(4) x [illegible] y^2 [illegible] z 的非负整数解集；

(5) $x^2+5x-6=0$ 的解集.

3. 确定下列的包含和属于关系是否正确.

(1) $\varnothing \subseteq \varnothing$；

(2) $\varnothing \subset \varnothing$；

(3) $\varnothing \in \varnothing$；

(4) [illegible] $\in$ [illegible] $\varnothing$ [illegible]；

(5) [illegible] $\subseteq$ [illegible] $\varnothing$ [illegible]；

(6) [illegible] $\in$ [illegible] 且 [illegible]；

(7) [illegible] $\in$ [illegible] $\varnothing$ 且 [illegible]；

(8) A为任一集合，则 [illegible] 且 $\varnothing \in P(A)$；

(9) $\{a,b\} \subseteq \{a,b,\{a,b\}\}$；

(10) $\{a,b\} \in \{a,b,\{a,b,c\}\}$；

(11) $\{a,b\} \in \{a,b,\{a,b\}\}$.

4. 设 A,B,C 为任意三个集合，下列各命题是否为真，并证明你的结论.

(1) 若 $A \in B$ 且 $B \subseteq C$，则 $A \in C$；

(2) 若 $A \in B$ 且 $B \subseteq C$，则 $A \subseteq C$；

(3) 若 $A \subseteq B$ 且 $B \in C$，则 $A \in C$；

(4) 若 A [illegible] B 且 $B \in C$，则 $A \subseteq C$.

5. 试证明属于关系不满足传递性，即对于任意的集合 A、B、C，若 $A\in B$ 且 $B\in C$，不一定有 $A\in C$ 成立.

6. 列出下列集合的各元子集，并求幂集

(1) a,b,c ,

(2) $1, 2, 3$,

(3) $\varnothing, \varnothing$,

(4) $1,2$, $1,1$, $(2,1,1,2)$.

(5) $\varnothing, 1, 1$

7. 画出下列各集合的文氏图.

(1) $A \cup B)$.

(2) $A\cap($ B $C)$.

(3) $A\cap$ $B\cap C)$;

(4) $A\cap B\cap C$ $\cup$ A B $C)$

8. 设全集 E $1,2,3,4,5$, A $1,$, B $1,2,5$, C $2,4$ ，求下列各集合(用列举法表示

(1) $A\cap$ B,

(2) $(A\cap B$ C ,

(3) $\sim(A\cap B)$,

(4) $\sim A\cup$ B,

(5) $P(A)\cap P(C)$

(6) $P(A)$ $P(C)$

9. 设 A,B,C,D 为整数集合 Z 的子集，其中，A $1,2,7,8$,B x , $50)$,C x x 可被 3 整除 $\wedge 0$ x 30 , D $x | x$ $2^k \wedge k\in Z\wedge 0$ k $($. 求下列集合(用列举法表示).

(1) $A\cup B$, $C\cup D$,

(2) $A\cap B\cap C\cap D$,

(3) B $(A\cup C)$,

(4) $($ $A\cap B)$ $)C$

10. 设 A a ，判断下列的包含与属于关系是否正确

(1) $\{\varnothing$ $\in PP(A)$,

(2) $\{\varnothing\}\subset PP(A$;

(3) $\{\varnothing,$ $\varnothing$ $\}\in PP(A)$,

(4) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \subseteq PP(A)$;

(5) $\{\varnothing, \{a\}\} \in PP(A)$;

(6) $\{\varnothing, \{a\}\} \subseteq PP(A)$.

11. 设 A, B 为两个集合，证明 $A \quad B \quad A$ 当且仅当 $A \cap B \quad \varnothing$.

12. 寻找下列各集合等式的充分必要条件，并证明之.

(1) $(A \quad B) \cup (A \quad C) \quad A$;

(2) $(A \quad B) \cup (A \quad C) = \varnothing$.

(3) $(A \quad B) \cap (A \quad C) \quad \varnothing$.

(4) $(A \quad B) \cap (A \quad C) = A$.

13. 设 A, B, C 为任意 3 个集合.

(1) 证明 $(A \quad B) \quad C \subseteq A \quad (B \quad C)$;

(2) 在什么条件下，(1)中等号成立?

14. 设 A, B, C 为任意的集合，已知

$$A \cap B \quad A \cap C \text{ 且 } \sim A \cap B \quad \sim A \cap C,$$

证明 $B \quad C$

15. 下列集合中哪些是彼此相等的?

$A \quad 3\ 4$; $B \quad 3, 4 \quad \cup \varnothing$;

$C \quad \{3, 4\} \quad \varnothing$; $D \quad \{x \mid x \in R \wedge x^2 \quad 7x + 12 = 0\}$;

$F \quad \varnothing, 3, 4$; $\quad, 4, 4$;

$H \quad \{4, \varnothing, \varnothing, 3\}$.

16. 化简下列集合.

(1) $\cup\{\ 3, 4\ ,\ 3\ ,\ 4\ , \{3, 4\}\ , \{3\ , 4\}\}$;

(2) $\cap\{PPP(\varnothing), PP(\varnothing), P(\varnothing), \varnothing\}$;

(3) $\cap\{PPP(\varnothing), PP(\varnothing), P(\varnothing)\}$.

17. 设 $\mathscr{A} \quad \varnothing\ , \{\varnothing\}$ ，计算下列各式

(1) $P(\mathscr{A})$; (2) $P(\quad \mathscr{A})$; (3) $\cup P(\mathscr{A})$.

18. 设 $\mathscr{B} \quad \{1, 2\}, \ 2, 3, \ 1, 3\ , \{\varnothing\}$ ，计算下列各式.

(1) $\cup \mathscr{B}$, (2) $\cap \mathscr{B}$, (3) $\cap \quad \mathscr{B}$; (4) $\quad \cap \mathscr{B}$.

19. 设 $\mathscr{A} \quad 1\ , A, B$ ，计算下列各式

(1) $\cup \cup \mathscr{A}$; (2) $\cap \cap \mathscr{A}$, (3) $\cap \cup \mathscr{A} \quad (\cup \quad \mathscr{A} \quad \cup \cap \mathscr{A})$

20. 设 A, B, C 为 3 个集合，已知 $(A \cap C) \subseteq (B \cap C)$, $(A \cap \sim C) \subseteq (B \cap \sim C)$，证明 $A \subseteq B$

21. 设 A,B 为两个集合，试求下列各式成立的充分必要条件.

(1) $A\cap B=A$; (2) $A\cup B=A$;

(3) $A\oplus B=A$; (4) $A\cap B=A\cup B$.

22. 设 A,B,C,D 为 4 个集合.

(1) 已知 $A\subseteq B$ 且 $C\subseteq D$，证明：$A\cup C\subseteq B\cup D$；$A\cap C\subseteq B\cap D$.

(2) 已知 $A\subset B$ 且 $C\subset D$，那么 $A\cup C\subset B\cup D$，$A\cap C\subset B\cap D$ 总为真吗？

23. 设 A,B,C 为 3 个集合，已知 $A\oplus B=A\oplus C$，证明 $B=C$.

24. 设 A,B,C 为 3 个集合，证明：

$$A-B-C=(A-C)-B=A-(B\cup C)=(A-C)-(B-C)$$

25. 化简下列各式.

(1) $(A\cap B)\cup(A-B)$;

(2) $A\cup(B-A)-B$;

(3) $((A\cup B\cup C)\cap(A\cup B))-((A\cup(B-C))\cap A)$.

26. 设 A,B,C 为任意集合，证明：

(1) $A\subseteq C\wedge B\subseteq C$ 当且仅当 $A\cup B\subseteq C$;

(2) $C\subseteq A\wedge C\subseteq B$ 当且仅当 $C\subseteq A\cap B$.

27. 设 A 为任意集合，证明 $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\in PPPA$，并且 $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\subseteq PPA$.

28. 设 A,B 为集合，E 是全集，证明下面命题是等价的.

(1) $A\subseteq B$;

(2) $\sim B\subseteq\sim A$;

(3) $\sim A\cup B=E$;

(4) $A-B\subseteq\sim A$;

(5) $A\cup B=B$.

29. 设 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 是非空的集族，且 $\mathscr{A}\cap\mathscr{B}\neq\varnothing$，证明

$$(\bigcap\mathscr{A})\cap(\bigcap\mathscr{B})\subseteq\bigcap(\mathscr{A}\cap\mathscr{B}).$$

30. 设 A,B 为两个集合，证明.

(1) $P(A)\cap P(B)=P(A\cap B)$;

(2) $P(A)\cup P(B)\subseteq P(A\cup B)$.

31. 求 1 到 250 这 250 个整数中，至少能被 2,3,5,7 之一整除的数的个数.

32. 75 名儿童到游乐场去玩. 他们可以骑旋转木马，坐滑行铁道，乘宇宙

飞船. 已知其中 20 人这三种东西都玩过，其中 55 人至少乘坐过其中的两种. 若每样乘坐一次的费用是 5 元，游乐场总共收入 700 元，试确定有多少儿童没有乘坐其中任何一种.

33. 设 $\{A_k\}$ 为一个集合列，其中 $A_k=[0,1+\frac{1}{k}]$，$k=1,2,\cdots$，求 $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k$ 和 $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k$. $\{A_k\}$ 收敛吗？

34. 设 $A_{11}=[0,1]$，$A_{21}=[0,\frac{1}{2}]$，$A_{22}=[\frac{1}{2},1]$，$\cdots$，$A_{ki}=[\frac{i-1}{k},\frac{i}{k}]$，$i=1,2,\cdots,k$，$k=1,2,\cdots$. 令 $B_1=A_{11}$，$B_2=A_{21}$，$B_3=A_{22}$，$\cdots$，求集合列 $\{B_k\}$ 的上、下极限.

35. 设 $A_{2k}=[0,\frac{1}{2k}]$，$k=1,2,\cdots$，$A_{2k+1}=[0,2k+1]$，$k=0,1,2,\cdots$，求集合列的上、下极限.

36. 设 $\{A_k\}$，$\{B_k\}$ 为两个集合列，证明：

(1) $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k\cup\underline{\lim\limits_{k\to\infty}} B_k\subset\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}(A_k\cup B_k)$

$\subset\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k\cup\underline{\lim\limits_{k\to\infty}} B_k(\underline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k\cup\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} B_k)$

$\subset\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}(A_k\cup B_k)=\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k\cup\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} B_k$；

(2) $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k\cap\underline{\lim\limits_{k\to\infty}} B_k=\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}(A_k\cap B_k)$

$\subset\underline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k\cap\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} B_k(\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k\cap\underline{\lim\limits_{k\to\infty}} B_k)$

$\subset\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}(A_k\cap B_k)\subset\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k\cap\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} B_k$；

(3) $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}(A_k-B_k)\subset\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k-\underline{\lim\limits_{k\to\infty}} B_k$；

(4) $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}(A_k-B_k)=\underline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k-\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} B_k$.

第二章 二元关系

关系一词是大家所熟知并且在生活、学习和工作中经常遇到和处理的概念. 在诸多的关系中,最基本的是涉及两个事物之间的关系,即二元关系. 本章的目的是给出二元关系的集合定义,研究二元关系的性质和运算以及特殊类型的二元关系.

§2.1 有序对与卡氏积

直观地说,一个有序对就是有顺序的一对客体,其数学定义如下.

定义 2.1 称$\{\{a\},\{a,b\}\}$为由元素a,b构成的**有序对**,记作$\langle a,b\rangle$[1],其中a称为有序对的第一个元素,b称为第二个元素,且a,b可以相同.

定理 2.1 $\langle a,b\rangle=\langle c,d\rangle$的充要条件是$a=c$且$b=d$.

为证明此定理先证明下面两个引理.

引理 1 $\{x,a\}=\{x,b\}$当且仅当$a=b$.

证明 充分性显然. 下面证明必要性.

(1) 若$x=a$,则

$$\begin{aligned}&\{x,a\}=\{x,b\}\\ \Rightarrow\ &\{a,a\}=\{a,b\}\\ \Rightarrow\ &\{a\}=\{a,b\}\\ \Rightarrow\ &b=a.\end{aligned}$$

(2) 若$x\neq a$,则由

1) 有的书上将有序对$\langle a,b\rangle$记为(a,b).

$$a \in \{x, a\} = \{x, b\}$$

$$\Rightarrow a = b. \quad ▌$$

引理 2 设 $\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$ 是非空的集族，若 $\mathscr{A}=\mathscr{B}$，则

(1) $\bigcup\mathscr{A}=\bigcup\mathscr{B}$；

(2) $\bigcap\mathscr{A}=\bigcap\mathscr{B}$.

证明 (1) $\forall x$

$$
\begin{aligned}
& x \in \bigcup\mathscr{A} \\
\Leftrightarrow\ & \exists z(z \in \mathscr{A} \land x \in z) \\
\Leftrightarrow\ & \exists z(z \in \mathscr{B} \land x \in z) && (\mathscr{A}=\mathscr{B}) \\
\Leftrightarrow\ & x \in \bigcup\mathscr{B}.
\end{aligned}
$$

所以 $\bigcup\mathscr{A}=\bigcup\mathscr{B}$.

(2) $\forall x$

$$
\begin{aligned}
& x \in \bigcap\mathscr{A} \\
\Leftrightarrow\ & \forall z(z \in \mathscr{A} \to x \in z) \\
\Leftrightarrow\ & \forall z(z \in \mathscr{B} \to x \in z) && (\mathscr{A}=\mathscr{B}) \\
\Leftrightarrow\ & x \in \bigcap\mathscr{B}.
\end{aligned}
$$

所以 $\bigcap\mathscr{A}=\bigcap\mathscr{B}$. ▌

下面证明定理 2.1.

充分性是显然的，下面证明必要性.

$$
\begin{aligned}
& \langle a,b\rangle=\langle c,d\rangle \\
\Leftrightarrow\ & \{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{c\},\{c,d\}\} \\
\Rightarrow\ & \bigcup\{\{a\},\{a,b\}\}=\bigcup\{\{c\},\{c,d\}\} && (\text{引理 2}) \\
\Rightarrow\ & \{a,b\}=\{c,d\}. && ①
\end{aligned}
$$

又 $\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{c\},\{c,d\}\}$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow\ & \bigcap\{\{a\},\{a,b\}\}=\bigcap\{\{c\},\{c,d\}\} && (\text{引理 2}) \\
\Rightarrow\ & \{a\}=\{c\} \\
\Leftrightarrow\ & a=c. && ②
\end{aligned}
$$

由①、②和引理 1 又得 $b=d$. ▌

推论 $a\neq b$ 时，$\langle a,b\rangle\neq\langle b,a\rangle$.

证明 否则

$$\langle a,b\rangle=\langle b,a\rangle$$

$$\Longleftrightarrow a=b. \qquad (定理2.1)$$

这与 $a\neq b$ 相矛盾. ∎

定理2.1及其推论说明,有序对的定义是有意义的,它反映了二对客体的顺序性.

如果有序对的第一个元素为有序对 $\langle a,b\rangle$,第二个元素为 c,此时将有序对 $\langle\langle a,b\rangle,c\rangle$ 称为有序的三元组,简记为 $\langle a,b,c\rangle$.

一般地,给出下面定义.

定义2.2 一个**有序 $n(n\geq 2)$ 元组**是一个有序对,它的第一个元素为有序的 $(n-1)$ 元组 $\langle a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}\rangle$,第二个元素为 a_n,记为 $\langle a_1,a_2,\cdots,a_n\rangle$,即

$$\langle\langle a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}\rangle,a_n\rangle=\langle a_1,a_2,\cdots,a_n\rangle.$$

n 维空间中点 M 的坐标 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为有序的 n 元组 $\langle x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle$.

由定理2.1不难证明下面定理.

定理2.2 $\langle a_1,a_2,\cdots,a_n\rangle=\langle b_1,b_2,\cdots,b_n\rangle$ 当且仅当 $a_i=b_i$, $i=1,2,\cdots,n$.

由定义2.1和定义2.2不难看出,有序的 n 元组 $(n\geq 2)$ 有严格的集合定义,但今后多数情况下,我们关注的是有序对及有序 n 元组中元素的次序性,而不去过多讨论它们的集合表示.

定义2.3 设 A,B 为二集合,称由 A 中元素为第一个元素,B 中元素为第二个元素的所有有序对组成的集合为 A 与 B 的**卡氏积**,记作 $A\times B$,即,$A\times B=\{\langle x,y\rangle \mid x\in A\wedge y\in B\}$.

设 $A=\{\varnothing,a\}$,$B=\{1,2,3\}$,不难算出:

$A\times B=\{\langle\varnothing,1\rangle,\langle\varnothing,2\rangle,\langle\varnothing,3\rangle,\langle a,1\rangle,\langle a,2\rangle,$
$\langle a,3\rangle\}$;

$B\times A=\{\langle 1,\varnothing\rangle,\langle 1,a\rangle,\langle 2,\varnothing\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 3,\varnothing\rangle,$

$<3,a>\}$;

$A\times A=\{<\varnothing,\varnothing>,<\varnothing,a>,<a,\varnothing>,<a,a>\}$;

$B\times B=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,1>,<2,2>,$
$<2,3>,<3,1>,<3,2>,<3,3>\}$.

设 A,B,C 为任意 3 个集合，卡氏积有下面性质：

(1) 不适合交换律，即

$A\times B\neq B\times A$（除非 $A=\varnothing\vee B=\varnothing\vee A=B$）；

(2) 不适合结合律，即

$(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C)$（除非 $A=\varnothing\vee B=\varnothing\vee C=\varnothing$）；

(3) 卡氏积适合下列 4 种形式的分配律：

① $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$;

② $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$;

③ $(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$;

④ $(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$.

(1)与(2)的证明简单，只要举出反例即可. 下面证明(3)中①.

$\forall<x,y>$,

$$
\begin{aligned}
&<x,y>\in A\times(B\cup C)\\
\Leftrightarrow\ & x\in A\wedge y\in(B\cup C)\\
\Leftrightarrow\ & x\in A\wedge(y\in B\vee y\in C)\\
\Leftrightarrow\ & (x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in C)\\
\Leftrightarrow\ & <x,y>\in A\times B\vee<x,y>\in A\times C\\
\Leftrightarrow\ & <x,y>\in(A\times B)\cup(A\times C).
\end{aligned}
$$

所以①式成立.

其余 3 式的证明留给读者.

卡氏积还有许多性质.

【例 2.1】 设 A,B,C,D 为 4 个集合.

(1) $A\times B=\varnothing$ 当且仅当 $A=\varnothing$ 或 $B=\varnothing$.

(2) 若 $A\neq\varnothing$，则 $A\times B\subseteq A\times C$ 当且仅当 $B\subseteq C$.

(3) 若 $A\subseteq C$ 且 $B\subseteq D$，则 $A\times B\subseteq C\times D$，并且当 $A=B=\varnothing$ 或 $A\neq\varnothing$ 且 $B\neq\varnothing$ 时，其逆为真.

证明 (1) 显然.

(2) 先证必要性. 若 $B=\varnothing$，结论显然成立. 下设 $B\neq\varnothing$. $\forall y\in B$，由于 $A\neq\varnothing$，存在 $x\in A$，使得

$$
\begin{aligned}
&\langle x,y\rangle\in A\times B\\
\Rightarrow\ &\langle x,y\rangle\in A\times C \qquad (A\times B\subseteq A\times C)\\
\Leftrightarrow\ &x\in A\wedge y\in C\\
\Rightarrow\ &y\in C.
\end{aligned}
$$

所以，$B\subseteq C$.

再证充分性. 若 $B=\varnothing$，由(1)知结论成立. 设 $B\neq\varnothing$，$\forall\langle x,y\rangle$，

$$
\begin{aligned}
&\langle x,y\rangle\in A\times B\\
\Leftrightarrow\ &x\in A\wedge y\in B\\
\Rightarrow\ &x\in A\wedge y\in C \qquad (B\subseteq C)\\
\Leftrightarrow\ &\langle x,y\rangle\in A\times C.
\end{aligned}
$$

所以，$A\times B\subseteq A\times C$.

其实，对于充分性而言，$A\neq\varnothing$ 的条件可以去掉.

(3) 证明简单. ▌

定义 2.4 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个集合($n\geq 2$)，称集合

$$\{\langle x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle \mid x_1\in A_1\wedge x_2\in A_2\wedge\cdots\wedge x_n\in A_n\}$$

为 **n 维卡氏积**，记作 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$. 当 $A_1=A_2=\cdots=A_n=A$ 时，记 A 生成的 n 维卡氏积为 A^n.

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 均为有穷集合，并设 $|A_i|=n_i$，$i=1,2,\cdots,n$，则 $|A_1\times A_2\times\cdots\times A_n|=n_1\times n_2\times\cdots\times n_n$.

n 维卡氏积的性质与二维卡氏积(即卡氏积)的性质类似，这里不再赘述.

§2.2 二元关系

定义 2.5 若集合 F 中的全体元素均为有序的 $n(n \geq 2)$ 元组，则称 F 为 n **元关系**，特别地，当 $n=2$ 时，称 F 为**二元关系**，简称为关系.

对于二元关系 F，若 $\langle x,y \rangle \in F$，常记为 xFy.

规定空集 $\varnothing$ 为 n 元空关系，当然也是二元空关系，简称**空关系**.

例如，$F_1=\{\langle a,b,c,d \rangle,\langle 1,2,3,4 \rangle,\langle$物理，化学，生物，数学$\rangle\}$为四元关系，

$F_2=\{\langle a,b,c \rangle,\langle \alpha,\beta,\gamma \rangle,\langle$大李，小李，老李$\rangle\}$为三元关系.

$R_1=\{\langle 1,2 \rangle,\langle \alpha,\beta \rangle,\langle a,b \rangle\}$ 和

$R_2=\{\langle 1,2 \rangle,\langle 3,4 \rangle,\langle$白菜，小猫$\rangle\}$均为二元关系.

$A=\{\langle a,b \rangle,\langle 1,2,3 \rangle,a,\alpha,1\}$ 是集合，但不是任何关系.

为了讨论有实际意义的二元关系，下面给出来自某个卡氏积的二元关系的定义.

定义 2.6 设 A,B 为二集合，$A \times B$ 的任何子集均称为 A 到 B 的二元关系，特别地，称 $A \times A$ 的子集 R 为 A 上的二元关系，记作 $R \subseteq A \times A$ 或 $R \in P(A \times A)$.

设 $A=\{a_1,a_2\}$，$B=\{b\}$，$A \times B$ 的子集 $\varnothing$，$\{\langle a_1,b \rangle\}$，$\{\langle a_2,b \rangle\}$，$\{\langle a_1,b \rangle,\langle a_2,b \rangle\}$ 为 A 到 B 的全部二元关系，$\varnothing$，$\{\langle b,a_1 \rangle\}$，$\{\langle b,a_2 \rangle\}$，$\{\langle b,a_1 \rangle,\langle b,a_2 \rangle\}$ 为 B 到 A 的全部二元关系. 而 B 上的二元关系有两个：$\varnothing$，$\{\langle b,b \rangle\}$. A 上共有 16 个二元关系.

一般说来，若 $|A|=m$，$|B|=n$，A 到 B 共有 2^{mn} 个二元关系，A 上共有 2^{m^2} 个二元关系.

设 A 为任一集合，除了 $\varnothing$ 为 A 上的特别的关系，即空关系外，

还可以定义如下的特殊关系：

称 $E_A=\{<x,y>|x\in A\wedge y\in A\}=A\times A$ 为 A 上的**全域关系**；

称 $I_A=\{<x,x>|x\in A\}$ 为 A 上的**恒等关系**.

若 A 是实数集或其子集，还可以定义下面的各种关系：

称 $D_A=\{<x,y>|x\in A\wedge y\in A\wedge x|y\}$ 为 A 上的**整除关系**，其中 $x|y$ 为 x 整除 y.

称 $L_A=\{<x,y>|x\in A\wedge y\in A\wedge x\leqslant y\}$ 为 A 上的**小于等于关系**…….

另外，设 A 为任意的集合，下面的关系也是常见的.

称 $\subseteq_A=\{<x,y>|x\subseteq A\wedge y\subseteq A\wedge x\subseteq y\}$ 为 $P(A)$ 上的**包含关系**，而

称 $\subset_A=\{<x,y>|x\subseteq A\wedge y\subseteq A\wedge x\subset y\}$ 为 $P(A)$ 上的**真包含关系**.

下面针对集合给出一些与二元关系有关的概念.

定义 2.7 设 R 为任一集合，称

$$\mathrm{dom}R=\{x|\exists y(xRy)\}$$

为 R 的**定义域**，称

$$\mathrm{ran}R=\{y|\exists x(xRy)\}$$

为 R 的**值域**，称

$$\mathrm{fld}R=\mathrm{dom}R\cup\mathrm{ran}R$$

为 R 的域.

设 $R_1=\{a,b\}$，$R_2=\{a,b,<c,d>,<e,f>\}$，$R_3=\{<1,2>,<3,4>,<5,6>\}$，当 a,b 不代表有序对时，R_1,R_2 均不是关系. 由定义得

$\mathrm{dom}R_1=\varnothing$，$\mathrm{ran}R_1=\varnothing$，$\mathrm{fld}R_1=\varnothing$，

$\mathrm{dom}R_2=\{c,e\}$，$\mathrm{ran}R_2=\{d,f\}$，

$\mathrm{fld}R_2=\{c,e,d,f\}$

$\mathrm{dom}R_3=\{1,3,5\}$，$\mathrm{ran}R_3=\{2,4,6\}$，

$\mathrm{fld}R_3=\{1,2,3,4,5,6\}$.

定义 2.8 设 F,G,A 为3个集合.

(1) 称 $F^{-1}=\{\langle x,y\rangle \mid \langle y,x\rangle\in F\}$ 为 F 的**逆**.

(2) 称 $F\circ G=\{\langle x,y\rangle \mid \exists z(\langle x,z\rangle\in G\wedge\langle z,y\rangle\in F)\}$ 为 F 与 G 的**合成**或**复合**.

(3) 称 $F\upharpoonright A=\{\langle x,y\rangle \mid \langle x,y\rangle\in F\wedge x\in A\}$ 为 F 在 A 上的**限制**.

(4) 称 $F[A]=\mathrm{ran}(F\upharpoonright A)$ 为 A 在 F 下的**象**.

(5) 若对于任意的 $y\in\mathrm{ran}F$,唯一地存在着 $x\in\mathrm{dom}F$,使得 $\langle x,y\rangle\in F$,则称 F 是**单根的**.

(6) 若对于任意的 $x\in\mathrm{dom}F$,唯一地存在着 $y\in\mathrm{ran}F$,使得 $\langle x,y\rangle\in F$,则称 F 是**单值的**.

在定义2.6和2.7中,请注意以下两点.

(1) 有的书上限制 R,F,G 为二元关系,A 为任意的集合,而在定义2.6和2.7中,没有给出这个限制.其实,无论 F,G 是否为二元关系,定义中得到的 $F^{-1},F\circ G,F\upharpoonright A$ 均为二元关系,当然有时为空关系.而当 R 中无有序对时,$\mathrm{dom}R,\mathrm{ran}R,\mathrm{fld}R$ 均为$\varnothing$.

(2) 有的书上将 F 与 G 的合成定义为

$$F\circ G=\{\langle x,y\rangle \mid \exists z(xFz\wedge zGy)\}.$$

不妨将本书中定义的合成称为 F 与 G 的**逆序合成**,而将此处的合成称为**顺序合成**.本书中下面遇到的合成均为逆序合成.

【例2.2】 设 $A=\{a,b,c,d\}$,$B=\{a,b,\langle c,d\rangle\}$,$R=\{\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle\}$,$F=\{\langle a,b\rangle,\langle a,\{a\}\rangle,\langle\{a\},\{a,\{a\}\}\rangle\}$,$G=\{\langle b,e\rangle,\langle d,c\rangle\}$.求

(1) A^{-1},B^{-1},R^{-1}.

(2) $B\circ R^{-1},G\circ B,G\circ R,R\circ G$.

(3) $F\upharpoonright\{a\},F\upharpoonright\{\{a\}\},F\upharpoonright\{a,\{a\}\},F^{-1}\upharpoonright\{\{a\}\}$.

(4) $F[\{a\}],F[\{a,\{a\}\}],F^{-1}[\{a\}],F^{-1}[\{\{a\}\}]$.



(1) $A^{-1}=\varnothing$, $B^{-1}=\{<d,c>\}$, $R^{-1}=\{<b,a>,<d,c>\}$.

(2) $B\circ R=\{<d,d>\}$, $G\circ B=\{<c,c>\}$,

$G\circ R=\{<a,e>,<c,c>\}$, $R\circ G=\{<d,d>\}$.

(3) $F\restriction\{a\}=\{<a,b>,<a,\{a\}>\}$,

$F\restriction\{\{a\}\}=\{<\{a\},\{a,\{a\}\}>\}$,

$F\restriction\{a,\{a\}\}=F$,

$F^{-1}\restriction\{\{a\}\}=\{<\{a\},a>\}$.

(4) $F[\{a\}]=\{b,\{a\}\}$, $F[\{a,\{a\}\}]=\{b,\{a\},\{a,\{a\}\}\}$,

$F^{-1}[\{a\}]=\varnothing$, $F^{-1}[\{\{a\}\}]=\{a\}$.

在以上的运算中，是按着求逆运算优先于合成、限制、象运算进行的，还规定求逆运算也优先于求定义域、值域和域的运算，并规定定义2.8中给出的各种运算都优先于集合的并、交、相对补、对称差等运算。

定理2.3 设F，G为二集合，则

(1) $\mathrm{dom}(F\cup G)=\mathrm{dom}F\cup\mathrm{dom}G$;

(2) $\mathrm{ran}(F\cup G)=\mathrm{ran}F\cup\mathrm{ran}G$;

(3) $\mathrm{dom}(F\cap G)\subseteq\mathrm{dom}F\cap\mathrm{dom}G$;

(4) $\mathrm{ran}(F\cap G)\subseteq\mathrm{ran}F\cap\mathrm{ran}G$;

(5) $\mathrm{dom}F-\mathrm{dom}G\subseteq\mathrm{dom}(F-G)$;

(6) $\mathrm{ran}F-\mathrm{ran}G\subseteq\mathrm{ran}(F-G)$.

证明 这里只证(1)，(4)，(5)。

(1) $\forall x$

$x\in\mathrm{dom}(F\cup G)$

$\Leftrightarrow\exists y(<x,y>\in F\cup G)$

$\Leftrightarrow\exists y(<x,y>\in F\vee<x,y>\in G)$

$\Leftrightarrow\exists y(<x,y>\in F)\vee\exists y(<x,y>\in G)$

$\Leftrightarrow x\in\mathrm{dom}F\vee x\in\mathrm{dom}G$

$\Leftrightarrow x\in(\mathrm{dom}F\cup\mathrm{dom}G)$.

所以，$\mathrm{dom}(F\cup G)=\mathrm{dom}F\cup\mathrm{dom}G$.

(4) $\forall y$,

$$
\begin{aligned}
& y \in \operatorname{ran}(F \cap G) \\
\Leftrightarrow\ & \exists x(\langle x, y\rangle \in F \cap G) \\
\Leftrightarrow\ & \exists x(\langle x, y\rangle \in F \wedge \langle x, y\rangle \in G) \\
\Rightarrow\ & \exists x(\langle x, y\rangle \in F) \wedge \exists x(\langle x, y\rangle \in G) \\
\Leftrightarrow\ & y \in \operatorname{ran} F \wedge y \in \operatorname{ran} G \\
\Leftrightarrow\ & y \in (\operatorname{ran} F \cap \operatorname{ran} G).
\end{aligned}
$$

所以，$\operatorname{ran}(F \cap G) \subseteq \operatorname{ran} F \cap \operatorname{ran} G$.

(5) $\forall x$,

$$
\begin{aligned}
& x \in (\operatorname{dom} F - \operatorname{dom} G) \\
\Leftrightarrow\ & x \in \operatorname{dom} F \wedge x \notin \operatorname{dom} G \\
\Leftrightarrow\ & \exists y(\langle x, y\rangle \in F) \wedge \forall z(\langle x, z\rangle \notin G) \\
\Rightarrow\ & \exists y(\langle x, y\rangle \in (F - G)) \\
\Leftrightarrow\ & x \in \operatorname{dom}(F - G). \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

请读者举例说明定理 2.3 中(3)～(6)中的等号不一定成立.

定理 2.4 设 F 为任一集合，则

(1) $\operatorname{dom} F^{-1} = \operatorname{ran} F$;

(2) $\operatorname{ran} F^{-1} = \operatorname{dom} F$;

(3) $(F^{-1})^{-1} \subseteq F$，当 F 为关系时，等号成立.

证明 (1) $\forall x$,

$$
\begin{aligned}
& x \in \operatorname{dom} F^{-1} \\
\Leftrightarrow\ & \exists y(\langle x, y\rangle \in F^{-1}) \\
\Leftrightarrow\ & \exists y(\langle y, x\rangle \in F) \\
\Leftrightarrow\ & x \in \operatorname{ran} F.
\end{aligned}
$$

所以，$\operatorname{dom} F^{-1} = \operatorname{ran} F$.

类似可以证明(2).

(3) 当 F 为关系时，易证 $(F^{-1})^{-1} = F$，当 F 不是关系时，$(F^{-1})^{-1} \subset F$，故一般情况下有 $(F^{-1})^{-1} \subseteq F$. $\blacksquare$

定理 2.5 设 R_1, R_2, R 为三个集合，则

$$(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3).$$

证明 $\forall <x,y>$

$<x,y> \in (R_1 \circ R_2) \circ R_3$

$\Leftrightarrow \exists z(<x,z> \in R_3 \wedge <z,y> \in R_1 \circ R_2)$

$\Leftrightarrow \exists z(<x,z> \in R_3 \wedge \exists t(<z,t> \in R_2 \wedge <t,y> \in R_1))$

$\Leftrightarrow \exists z \exists t(<x,z> \in R_3 \wedge (<z,t> \in R_2 \wedge <t,y> \in R_1))$

$\Leftrightarrow \exists t(\exists z(<x,z> \in R_3 \wedge <z,t> \in R_2 \wedge <t,y> \in R_1))$

$\Leftrightarrow \exists t(<x,t> \in R_2 \circ R_3 \wedge <t,y> \in R_1)$

$\Leftrightarrow <x,y> \in R_1 \circ (R_2 \circ R_3).$

所以,$(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$. ∎

本定理说明集合之间的合成运算满足结合律.

定理 2.6 设 R_1, R_2, R_3 是三个集合,则

(1) $R_1 \circ (R_2 \cup R_3) = R_1 \circ R_2 \cup R_1 \circ R_3$;

(2) $(R_1 \cup R_2) \circ R_3 = R_1 \circ R_3 \cup R_2 \circ R_3$;

(3) $R_1 \circ (R_2 \cap R_3) \subseteq R_1 \circ R_2 \cap R_1 \circ R_3$;

(4) $(R_1 \cap R_2) \circ R_3 \subseteq R_1 \circ R_3 \cap R_2 \circ R_3$.

证明 (1) $\forall <x,y>$

$<x,y> \in R_1 \circ (R_2 \cup R_3)$

$\Leftrightarrow \exists z(<x,z> \in (R_2 \cup R_3) \wedge <z,y> \in R_1)$

$\Leftrightarrow \exists z((<x,z> \in R_2 \vee <x,z> \in R_3) \wedge <z,y> \in R_1)$

$\Leftrightarrow \exists z((<x,z> \in R_2 \wedge <z,y> \in R_1) \vee (<x,z> \in R_3 \wedge <z,y> \in R_1))$

$\Leftrightarrow \exists z(<x,z> \in R_2 \wedge <z,y> \in R_1) \vee \exists z(<x,z> \in R_3 \wedge <z,y> \in R_1)$

$\Leftrightarrow <x,y> \in R_1 \circ R_2 \vee <x,y> \in R_1 \circ R_3$

$\Leftrightarrow <x,y> \in (R_1 \circ R_2 \cup R_1 \circ R_3).$

故(1)中等式成立.

(3) $\forall <x,y>$

$<x,y> \in R_1 \circ (R_2 \cap R_3)$

$\Leftrightarrow \exists z(\langle x,z\rangle \in R_2 \cap R_3 \wedge \langle z,y\rangle \in R_1)$

$\Leftrightarrow \exists z(\langle x,z\rangle \in R_2 \wedge \langle x,z\rangle \in R_3 \wedge \langle z,y\rangle \in R_1)$

$\Rightarrow \exists z(\langle x,z\rangle \in R_2 \wedge \langle z,y\rangle \in R_1)$

$\wedge \exists z(\langle x,z\rangle \in R_3 \wedge \langle z,y\rangle \in R_1)$

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in R_1 \circ R_2 \wedge \langle x,y\rangle \in R_1 \circ R_3$

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in (R_1 \circ R_2 \cap R_1 \circ R_3).$

故(3)中包含关系成立.

(2)与(4)的证明留给读者. ∎

请举例说明(3),(4)中等式不一定成立.

定理 2.7 设 F,G 为任意集合,则

$$(F \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ F^{-1}.$$

证明 $\forall \langle x,y\rangle$

$\langle x,y\rangle \in (F \circ G)^{-1}$

$\Leftrightarrow \langle y,x\rangle \in F \circ G$

$\Leftrightarrow \exists z(\langle y,z\rangle \in G \wedge \langle z,x\rangle \in F)$

$\Leftrightarrow \exists z(\langle z,y\rangle \in G^{-1} \wedge \langle x,z\rangle \in F^{-1})$

$\Leftrightarrow \exists z(\langle x,z\rangle \in F^{-1} \wedge \langle z,y\rangle \in G^{-1})$

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in G^{-1} \circ F^{-1}.$ ∎

定理 2.8 设 $R,S,A,B,\mathscr{A}$ 为集合,$\mathscr{A} \neq \varnothing$,则

(1) $R \upharpoonright (A \cup B) = (R \upharpoonright A) \cup (R \upharpoonright B)$;

(2) $R \upharpoonright \bigcup \mathscr{A} = \bigcup \{R \upharpoonright A \mid A \in \mathscr{A}\}$;

(3) $R \upharpoonright (A \cap B) = (R \upharpoonright A) \cap (R \upharpoonright B)$;

(4) $R \upharpoonright \bigcap \mathscr{A} = \bigcap \{R \upharpoonright A \mid A \in \mathscr{A}\}$;

(5) $(R \circ S) \upharpoonright A = R \circ (S \upharpoonright A)$.

证明 下面只证(2),(4),(5).

(2) $\forall \langle x,y\rangle$,

$\langle x,y\rangle \in R \upharpoonright \bigcup \mathscr{A}$

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in R \wedge x \in \bigcup \mathscr{A}$

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in R \wedge \exists A(A \in \mathscr{A} \wedge x \in A)$

$\Leftrightarrow \exists A(\langle x,y\rangle \in R \wedge x \in A \wedge A \in \mathscr{A})$

$\Leftrightarrow \exists A(\langle x,y\rangle \in R\upharpoonright A \wedge A \in \mathscr{A})$

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in \bigcup\{R\upharpoonright A \mid A \in \mathscr{A}\}$.

(4) $\forall \langle x,y\rangle$,

$\langle x,y\rangle \in R\upharpoonright \bigcap \mathscr{A}$

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in R \wedge x \in \bigcap \mathscr{A}$

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in R \wedge \forall A(A \in \mathscr{A} \rightarrow x \in A)$

$\Leftrightarrow \forall A(\langle x,y\rangle \in R \wedge (\neg A \in \mathscr{A} \vee x \in A))$

$\Leftrightarrow \forall A((\langle x,y\rangle \in R \wedge \neg A \in \mathscr{A}) \vee (\langle x,y\rangle \in R \wedge x \in A))$

$\Leftrightarrow \forall A(\neg(\neg\langle x,y\rangle \in R \vee A \in \mathscr{A}) \vee \langle x,y\rangle \in R\upharpoonright A)$

$\Leftrightarrow \forall A(\neg A \in \mathscr{A} \vee \langle x,y\rangle \in R\upharpoonright A)$

$\Leftrightarrow \forall A(A \in \mathscr{A} \rightarrow \langle x,y\rangle \in R\upharpoonright A)$

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in \bigcap\{R\upharpoonright A \mid A \in \mathscr{A}\}$.

证明中应注意，若$\langle x,y\rangle \in R\upharpoonright \bigcap \mathscr{A}$为真，则$\langle x,y\rangle \notin R$为假，类似地，若$\langle x,y\rangle \in \bigcap\{R\upharpoonright A \mid A \in \mathscr{A}\}$为真，则$\langle x,y\rangle \notin R$为假.

(5) $\forall \langle x,y\rangle$,

$\langle x,y\rangle \in (R\circ S)\upharpoonright A$

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in R\circ S \wedge x \in A$

$\Leftrightarrow \exists z(\langle x,z\rangle \in S \wedge \langle z,y\rangle \in R) \wedge x \in A$

$\Leftrightarrow \exists z(\langle x,z\rangle \in S \wedge x \in A \wedge \langle z,y\rangle \in R)$

$\Leftrightarrow \exists z(\langle x,z\rangle \in S\upharpoonright A \wedge \langle z,y\rangle \in R)$

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in R\circ(S\upharpoonright A)$. ■

定理 2.9 设$R,S,A,B,\mathscr{A}$为集合，$\mathscr{A} \neq \varnothing$，则

(1) $R[A\cup B]=R[A]\cup R[B]$;

(2) $R[\bigcup \mathscr{A}]=\bigcup\{R[A] \mid A \in \mathscr{A}\}$;

(3) $R[A\cap B]\subset R[A]\cap R[B]$;

(4) $R[\bigcap \mathscr{A}]\subset \bigcap\{R[A] \mid A \in \mathscr{A}\}$;

(5) $R[A]-R[B]\subseteq R[A-B]$;

(6) $(R\circ S)[A]=R[S[A]]$.

证明 只证明(2),(4),(5),(6).

(2) $\forall y$,

$$
\begin{aligned}
& y\in R[\cup\mathscr{A}] \\
\Leftrightarrow\ & \exists x(x\in\cup\mathscr{A}\wedge\langle x,y\rangle\in R) \\
\Leftrightarrow\ & \exists x(\exists A(A\in\mathscr{A}\wedge x\in A)\wedge\langle x,y\rangle\in R) \\
\Leftrightarrow\ & \exists A(A\in\mathscr{A}\wedge\exists x(x\in A\wedge\langle x,y\rangle\in R)) \\
\Leftrightarrow\ & \exists A(A\in\mathscr{A}\wedge y\in R[A]) \\
\Leftrightarrow\ & y\in\cup\{R[A]\mid A\in\mathscr{A}\}
\end{aligned}
$$

(4) $\forall y$,

$$
\begin{aligned}
& y\in R[\cap\mathscr{A}] \\
\Leftrightarrow\ & \exists x(x\in\cap\mathscr{A}\wedge\langle x,y\rangle\in R) \\
\Leftrightarrow\ & \exists x(\forall A(A\in\mathscr{A}\to x\in A)\wedge\langle x,y\rangle\in R) \\
\Leftrightarrow\ & \exists x\forall A((A\in\mathscr{A}\to x\in A)\wedge\langle x,y\rangle\in R) \\
\overset{①}{\Rightarrow}\ & \forall A\exists x((A\in\mathscr{A}\to x\in A)\wedge\langle x,y\rangle\in R) \\
\Leftrightarrow\ & \forall A(\exists x((A\in\mathscr{A}\to x\in A)\wedge\langle x,y\rangle\in R)) \\
\overset{②}{\Rightarrow}\ & \forall A(\exists x(A\in\mathscr{A}\to x\in A\wedge\langle x,y\rangle\in R)) \\
\Leftrightarrow\ & \forall A(A\in\mathscr{A}\to\exists x(x\in A\wedge\langle x,y\rangle\in R)) \\
\Leftrightarrow\ & \forall A(A\in\mathscr{A}\to y\in R[A]) \\
\Leftrightarrow\ & y\in\cap\{R[A]\mid A\in\mathscr{A}\}.
\end{aligned}
$$

下面对①,②进行说明.

① $\exists x\forall yA(x,y)\to\forall y\exists xA(x,y)$为永真式.

② $((p\to q)\wedge r)\to(p\to(q\wedge r))$为永真式.

(5) $\forall y$,

$$
\begin{aligned}
& y\in(R[A]-R[B]) \\
\Leftrightarrow\ & y\in R[A]\wedge y\notin R[B] \\
\Leftrightarrow\ & y\in R[A]\wedge\neg y\in R[B]
\end{aligned}
$$

$\Leftrightarrow \exists x(x\in A\wedge <x,y>\in R)\wedge \neg\exists x(x\in B\wedge <x,y>$
$\in R)$

$\Leftrightarrow \exists x(x\in A\wedge <x,y>\in R)\wedge\forall x(\neg x\in B\vee \neg <x,y>\in R)$

$\Leftrightarrow \exists x(x\in A\wedge <x,y>\in R)\wedge\forall x(<x,y>\in R\rightarrow x\notin B)$

$\stackrel{1}{\Rightarrow} \exists x(x\in A\wedge <x,y>\in R\wedge x\notin B)$

$\Leftrightarrow \exists x(x\in (A-B)\wedge <x,y>\in R)$

$\Leftrightarrow y\in F[A-B].$

请读者证明(1)，即证下面推理：

前提：$\exists x(x\in A\wedge <x,y>\in R)$，

$\quad\forall x(<x,y>\in R\rightarrow x\notin B)$.

结论：$\exists x(x\in A\wedge <x,y_0>\in R\wedge x\notin B)$.

其中 y_0 是经过全称量词消去规则后得到的任意的个体常项.

(6) $\forall y$,

$y\in (R\circ S)[A]$

$\Leftrightarrow \exists x(x\in A\wedge <x,y>\in R\circ S)$

$\Leftrightarrow \exists x(x\in A\wedge \exists t(<x,t>\in S\wedge <t,y>\in R))$

$\Leftrightarrow \exists x\exists t(x\in A\wedge <x,t>\in S\wedge <t,y>\in R)$

$\Leftrightarrow \exists t(\exists x(x\in A\wedge <x,t>\in S)\wedge <t,y>\in R)$

$\Leftrightarrow \exists t(t\in S[A]\wedge <t,y>\in R)$

$\Leftrightarrow y\in R[S[A]].$ ▌

本定理中(3)，(4)，(5)均为包含关系，当 R 为单根时，包含关系变为相等关系.

【例 2.3】 设 $R=\{<x,y>\mid x,y\in Z\wedge y=|x|\}$，$A=\{0,1,2\}$，$B=\{0,-1,-2\}$.

(1) 求 $R[A\cap B]$ 和 $R[A]\cap R[B]$；

(2) 求 $F[A]-F[B]$ 和 $F[A-B]$.

解 (1) 显然有 $R[A\cap B]=R[\{0\}]=\{0\}$，而

$F[A]\cap F[B]=\{0,1,2\}\cap\{0,1,2\}=\{0,1,2\}$，有

$$R[A\cap B]\subset F[A]\cap F[B].$$

(2) $F[A]-F[B]=\{0,1,2\}-\{0,1,2\}=\varnothing$，

$F[A-B]=F[\{1,2\}]=\{1,2\}$，因而

$$F[A]-F[B]\subset F[A-B].$$

以上两个真包含关系产生的原因是 R 非单根.

取 $S=\{<x,y>|x,y\in Z\wedge y=x\}$，$A,B$ 不变，再讨论(1)和(2)中的问题，就会得到两个等式.

§ 2.3 关系矩阵和关系图

关系矩阵和关系图[①]是除了集合之外的另两种表示关系的方法. 这里所谈关系是指集合 A 上的二元关系.

定义 2.9 设 $A=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，$R\subseteq A\times A$，称矩阵 $M(R)=(r_{ij})_{n\times n}$ 为 R 的**关系矩阵**，其中

$$r_{ij}=\begin{cases}1, & x_iRx_j,\\ 0, & 否则.\end{cases}$$

关系矩阵有下列诸条性质：

(1) R 的集合表达式与 R 的关系矩阵是可以唯一相互确定的.

(2) $M(R^{-1})=(M(R))^T$.

(3) 若对 $F=\{0,1\}$ 中的元素的加法使用逻辑加法($0+0=0$，$0+1=1+0=1+1=1$)，则对于任意的 $R_1,R_2\subseteq A\times A$，均有

$$M(R_1\circ R_2)=M(R_2)\cdot M(R_1).$$

由(1)，(3)可知，使用矩阵乘法(加法使用逻辑加法)可求出逆关系及合成关系的关系矩阵，从而可确定其集合表达式.

---

① 关系矩阵和关系图是对有穷集合上的二元关系所定义的.

【例 2.4】 设 $A=\{a,b,c\}$，$R_1,R_2\subseteq A\times A$，其集合表达式分别为

$$R_1=\{<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,c>\},$$

$$R_2=\{<a,b>,<a,c>,<b,c>\}.$$

用 $M(R_1)$，$M(R_2)$确定 $M(R_1^{-1})$，$M(R_2^{-1})$，$M(R_1\circ R_1)$，$M(R_1\circ R_2)$，$M(R_2\circ R_1)$，从而求出它们的集合表达式.

解 $M(R_1)=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$，$M(R_2)=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$，

$$M(R_1^{-1})=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},\quad M(R_2^{-1})=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{bmatrix},$$

$$M(R_1\circ R_1)=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$$M(R_1\circ R_2)=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$$M(R_2\circ R_1)=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

由性质(1)得

$R_1^{-1}=\{<a,a>,<a,b>,<b,a>,<c,b>\}$，

$R_2^{-1}=\{<b,a>,<c,a>,<c,b>\}$，

$R_1\circ R_1=\{<a,a>,<a,b>,<a,c>,<b,a>,<b,b>\}$，

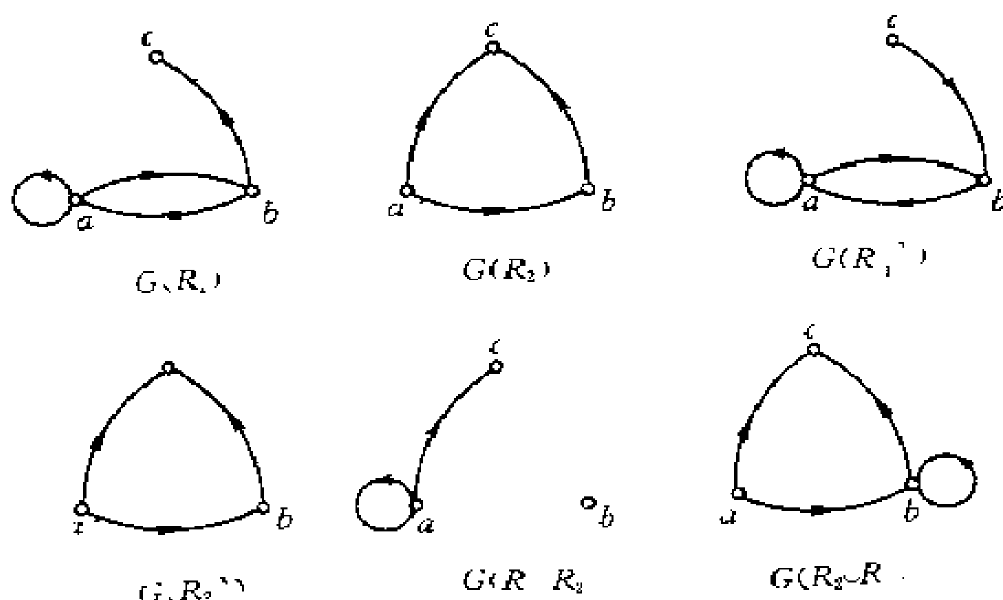
$R_1\circ R_2=\{<a,a>,<a,c>\}$，

$R_2\circ R_1=\{<a,b>,<a,c>,<b,b>,<b,c>\}$.

定义 2.10 设 $A=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，$R\subseteq A\times A$. 以 A 中元素为顶点，在图中用"。"表示顶点. 若 x_iRx_j，则从顶点 x_i 向 x_j 引有向

边$<x_i, x_j>$，称所画出的图为 R 的**关系图**[1]，记作 $G(R)$.

图 2.1 给出了例 2.4 中各图的关系图(除 $G(R_1 \circ R_2)$外).



$G(R_1)$　$G(R_2)$　$G(R_1^{-1})$

$G(R_2^{-1})$　$G(R_1 \circ R_2)$　$G(R_2 \circ R_1)$

图 2.1

当 A 中元素标定次序后，对于任何 $R \subset A \times A$，R 的关系图 $G(R)$ 与 R 的集合表达式也是可以唯一相互确定的，因而 R 的集合表达式、关系矩阵、关系图三者均可以唯一相互确定. 容易看出，关系的集合表达式便于书写，关系矩阵便于存储，而关系图直观，清晰.

设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_m\}$，$R \subseteq A \times B$，类似可以定义 R 的关系矩阵 $M(R)$ 和关系图 $G(R)$. 只是 $M(R)$ 是 $n \times m$ 阶的，$G(R)$ 中有向边的方向均是从 A 中元素指向 B 中元素的.

§2.4　关系的性质

有必要说明，本节内讨论的是非空集合上的二元关系的性质.

定义 2.11　设 A 为一集合，$R \subset A \times A$.

---

① 关系图是图论中的有向图.

(1) 若对于任意的 $x\in A$，均有 xRx，则称 R 是 A 上**自反的**二元关系，也即

$$R\text{ 是自反的}\Longleftrightarrow \forall x(x\in A\rightarrow xRx).$$

(2) 若对于任意的 $x\in A$，均有 $x\not R x$[1]，则称 R 是 A 上**反自反的**二元关系[2]，也即

$$R\text{ 是反自反的}\Longleftrightarrow \forall x(x\in A\rightarrow x\not R x)$$

(3) 对于任意的 $x,y\in A$，若 xRy，则 yRx，则称 R 为 A 上**对称的**二元关系，也即

$$R\text{ 是对称的}\Longleftrightarrow \forall x\forall y(x\in A\wedge y\in A\wedge xRy\rightarrow yRx)$$

(4) 对于任意的 $x,y\in A$，若 xRy 且 $x\neq y$，则 $y\not R x$，则称 R 为 A 上**反对称的**二元关系，也即

$$R\text{ 是反对称的}\Longleftrightarrow \forall x\forall y(x\in A\wedge y\in A\wedge xRy\wedge yRx\rightarrow x=y).$$

(5) 对于任意的 $x,y,z\in A$，若 xRy 且 yRz，则 xRz，则称 R 为 A 上**传递的**二元关系，也即

$$R\text{ 是传递的}\Longleftrightarrow \forall x\forall y\forall z(x\in A\wedge y\in A\wedge z\in A\wedge xRy\wedge yRz\rightarrow xRz).$$

由定义不难看出下面三个定理是成立的.

定理 2.10 设 $R\subseteq A\times A$，则下面的命题是等价的：

(1) R 是自反的；

(2) $I_A\subseteq R$；

(3) R^{-1} 是自反的；

(4) $M(R)$ 主对角线上的元素全为 1；

(5) $G(R)$ 的每个顶点处均有环[3].

定理 2.11 设 $R\subseteq A\times A$，则下面命题是等价的：

(1) R 是反自反的；

(2) $I_A\cap R=\varnothing$；

---

[1] $x\not R x$ 当且仅当 $\langle x,x\rangle\notin R$

[2] 有的书上将反自反的称为非自反的

[3] 顶点 x 到自身的有向边 $\langle x,x\rangle$ 称为环，这个概念在图论中还要严格定义.

(3) R^{-1}是反自反的;

(4) $M(R)$主对角线上元素全为0;

(5) $G(R)$的每个顶点处均无环.

定理 2.12 $R\subseteq A\times A$,则下面命题是等价的.

(1) R 是对称的;

(2) $R^{-1}=R$;

(3) $M(R)$是对称的;

(4) $G(R)$中任何二个顶点之间若有有向边,必有两条方向相反的有向边.

定理 2.13 设 $R\subseteq A\times A$,则下面命题是等价的:

(1) R 是反对称的;

(2) $R\cap R^{-1}\subseteq I_A$;

(3) 在 $M(R)$中,若任意的 $r_{ij}=1(i\neq j)$,则必有 $r_{ji}=0$;

(4) 在 $G(R)$中,对于任何二顶点 x_i、$x_j(i\neq j)$,若有有向边$<x_i,x_j>$,则必没有$<x_j,x_i>$.

定理 2.14 设 $R\subseteq A\times A$,则下面命题是等价的:

(1) R 是传递的;

(2) $R\circ R\subseteq R$;

(3) 在 $M(R\circ R)$中,若任意的$r'_{ij}=1$,则$M(R)$中相应的元素 $r_{ij}=1$;

(4) 在 $G(R)$中,对于任意顶点 x_i,x_j,x_k 若有有向边$<x_i,x_j>$、$<x_j,x_k>$,则必有有向边$<x_i,x_k>$(即若从 x_i 到 x_k 有长为 2 的有向通路,则从 x_i 到 x_k 必有长度为 1 的有向通路[1]).

取集合为自然数集合 N,讨论下面各关系的性质:

$L_1=\{<x,y>|x\in N\wedge y\in N\wedge x\leq y\}$,

$L_2=\{<x,y>|x\in N\wedge y\in N\wedge x<y\}$,

$L_3=\{<x,y>|x\in N\wedge y\in N\wedge x\geq y\}$.

[1] 有向通路请见图论中通路与回路的定义.

$L_> = \{<x,y> \mid x\in N \wedge y\in N \wedge x>y\}$,

$L_D = \{<x,y> \mid x\in N \wedge y\in N \wedge x$ 整除 $y\}$,

$I_N = \{<x,y> \mid x\in N \wedge y\in N \wedge x=y\}$,

$E_N = \{<x,y> \mid x\in N \wedge y\in N\}$.

容易看出：$L_{\leqslant}$ 和 $L_{\geqslant}$ 是自反的、反对称的、传递的.

$L_<$ 和 $L_>$ 是反自反的、反对称的、传递的.

L_D 是反对称的和传递的，注意 L_D 既不是自反的，又不是反自反的，其原因是 $0\in N$.

I_N 为 N 上的恒等关系，它是自反的、对称的、反对称的、传递的.

E_N 是 N 上的全域关系，它是自反的、对称的、传递的.

【例 2.5】 设 $A=\{a,b,c\}$，$R_i\subseteq A\times A(i=1,2,\cdots,6)$，它们的集合表达式分别为：

$$R_1=\{<a,a>,<a,b>,<b,c>,<a,c>\},$$
$$R_2=\{<a,a>,<a,b>,<b,c>,<c,a>\},$$
$$R_3=\{<a,a>,<b,b>,<a,b>,<b,a>,<c,c>\},$$
$$R_4=\{<a,a>,<a,b>,<b,a>,<c,c>\},$$
$$R_5=\{<a,a>,<a,b>,<b,b>,<c,c>\},$$
$$R_6=\{<a,b>,<b,a>,<b,c>,<a,a>\}.$$

讨论以上各关系的性质.

解 先画出各关系的关系图，见图 2.2 所示.

从关系图不难看出：

R_1 是反对称的和传递的；

R_2 是反对称的；

R_3 是自反的、对称的和传递的；

R_4 是对称的；

R_5 是自反的、反对称的和传递的；

R_6 没有讨论的 5 种性质中的任何一种性质.

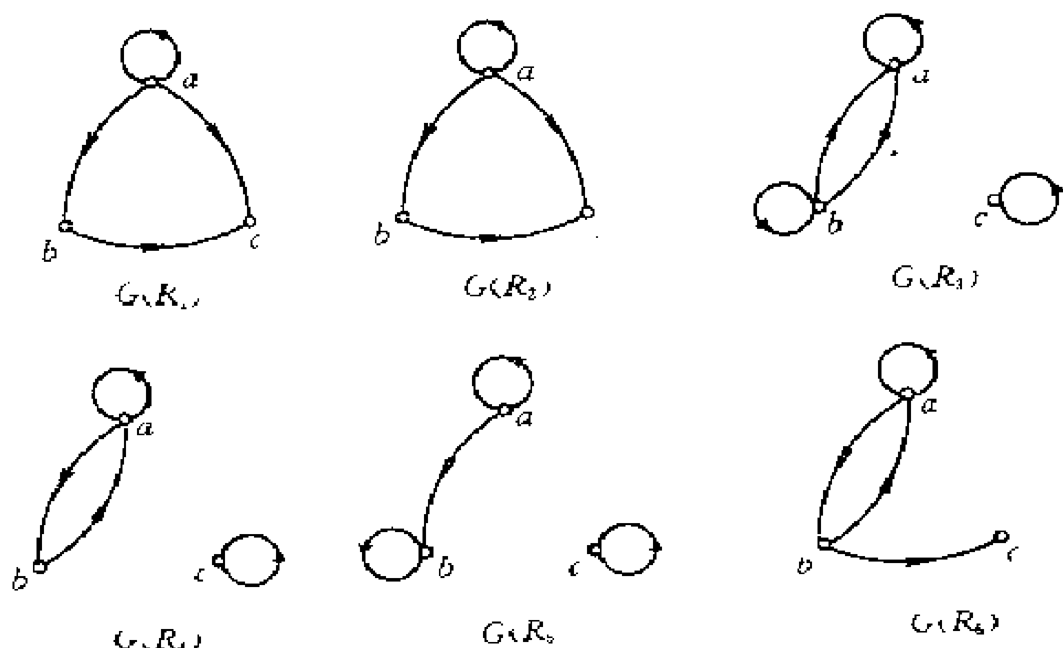


图 2.2

定理 2.15 设 $R_1、R_2 \subseteq A \times A$.

(1) 若 R_1,R_2 是自反的，则 $R_1^{-1},R_2^{-1},R_1 \cup R_2,R_1 \cap R_2,R_1 \circ R_2$ $(R_2 \circ R_1)$ 也是自反的.

(2) 若 R_1,R_2 是反自反的，则 $R_1^{-1},R_2^{-1},R_1 \cup R_2,R_1 \cap R_2,R_1-R_2(R_2-R_1)$ 也是反自反的；

(3) 若 R_1,R_2 是对称的，则 $R_1^{-1},R_2^{-1},R_1 \cup R_2,R_1 \cap R_2,R_1-R_2$ (R_2-R_1)，$\sim R_1=E-R_1$，$\sim R_2$ 也是对称的；

(4) 若 R_1,R_2 是反对称的，则 $R_1^{-1},R_2^{-1},R_1 \cap R_2,R_1-R_2(R_2-R_1)$，也是反对称的；

(5) 若 R_1,R_2 是传递的，则 $R_1^{-1},R_2^{-1},R_1 \cap R_2$ 也是传递的.

证明 (1) 只证明 $R_1 \circ R_2$.

$\forall x \in A$

$\Rightarrow \langle x,x \rangle \in R_2 \wedge \langle x,x \rangle \in R_1$ $\qquad$ (R_1,R_2 是自反的)

$\Rightarrow \langle x,x \rangle \in R_1 \circ R_2$.

所以，$R_1 \circ R_2$ 是自反的.

(2) 只证 $R_1 \cap R_2$

若∃ $x\in A$，使得

$$<x,x>\in R_1\cap R_2$$

$$\Leftrightarrow <x,x>\in R_1 \wedge <x,x>\in R_2.$$

这与 R_1 与 R_2 是反自反的相矛盾，所以，$R_1\cap R_2$ 是反自反的.

(3) 证明 $R_1\cup R_2$ 和 $\sim R_1$.

$\forall x,y\in A$，

$$<x,y>\in R_1\cup R_2$$

$$\Leftrightarrow <x,y>\in R_1 \vee <x,y>\in R_2$$

$$\Rightarrow <y,x>\in R_1 \vee <y,x>\in R_2 \qquad (R_1,R_2\text{ 是对称的})$$

$$\Leftrightarrow <y,x>\in R_1\cup R_2.$$

所以，$R_1\cup R_2$ 是对称的.

$\forall x,y\in A$

$$<x,y>\in \sim R_1$$

$$\Leftrightarrow <x,y>\in (E_A-R_1)$$

$$\Leftrightarrow <x,y>\in E_A \wedge <x,y>\notin R_1$$

$$\Leftrightarrow <y,x>\in E_A \wedge <y,x>\notin R_1 \qquad (E_A,R_1\text{ 是对称的})$$

$$\Leftrightarrow <y,x>\in (E_A-R_1)$$

$$\Leftrightarrow <y,x>\in \sim R_1.$$

所以，$\sim R_1$ 是对称的.

(4) 证 R_1^{-1}.

若∃ $x,y\in A$ 且 $x\neq y$，使得

$$<x,y>\in R_1^{-1} \wedge <y,x>\in R_1^{-1}$$

$$\Leftrightarrow <y,x>\in R_1 \wedge <x,y>\in R_1.$$

这与 R_1 是反对称的矛盾，所以 R_1^{-1} 是反对称的.

(5) 证明 $R_1\cap R_2$.

$\forall x,y,z\in A$，

$$<x,y>\in R_1\cap R_2 \wedge <y,z>\in R_1\cap R_2$$

$$\Leftrightarrow <x,y>\in R_1 \wedge <x,y>\in R_2 \wedge <y,z>\in R_1 \wedge <y,z>\in R_2$$

$\Leftrightarrow (\langle x,y\rangle \in R_1 \wedge \langle y,z\rangle \in R_1) \wedge (\langle x,y\rangle \in R_2 \wedge \langle y,z\rangle \in R_2)$

$\Rightarrow \langle x,z\rangle \in R_1 \wedge \langle x,z\rangle \in R_2$（$R_1,R_2$ 传递）

$\Leftrightarrow \langle x,z\rangle \in R_1 \cap R_2$.

所以，$R_1 \cap R_2$ 是传递的. ∎

§ 2.5　二元关系的幂运算

前面已经讨论过集合的合成运算. 本节讨论集合 A 上的关系的合成运算，特别是讨论同一个关系的幂运算.

定义 2.12　设 $R \subseteq A \times A$，n 为自然数，R 的 n 次幂记作 R^n，其中

(1) $R^0 = I_A$;

(2) $R^{n+1} = R^n \circ R$，$n \geq 1$.

显然 R^n 还是 A 上的二元关系.

设 $A = \{a,b,c\}$，$R \subseteq A \times A$，且 $R = \{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle a,c\rangle\}$，求 R 的各次幂.

$R^0 = I_A$，

$R^1 = R^0 \circ R = R = \{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle a,c\rangle\}$，

$R^2 = R^1 \circ R = \{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,c\rangle\}$，

$R^3 = R^2 \circ R = \{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,a\rangle\} = R^1$，

$R^4 = R^3 \circ R = R \circ R = R^2$，

$R^5 = R^4 \circ R = R^2 \circ R = R^3 = R$.

不难看出，$R^{2k+1} = R^3 = R$，$k = 0,1,2,\cdots$，

$R^{2k} = R^2$，$k = 1,2,\cdots$.

本例的结果不是偶然的，请看下面定理.

定理 2.16　设 A 为含 n 个元素的有穷集合，$R \subseteq A \times A$，则存在自然数 s,t，且满足 $0 \leq s < t \leq 2^{n^2}$，使得 $R^s = R^t$.

证明　显然 $P(A \times A)$ 中元素对幂运算是封闭的，即对任意的

自然数 k，有 $R^k \in P(A\times A)$，$k=0,1,2,\cdots$，而 $|P(A\times A)|=2^{n^2}$，考虑 R 的各项幂 $R^0,R^1,\cdots,R^{2^{n^2}}$，共产生 $2^{n^2}+1$ 个 $P(A\times A)$的二元关系，由鸽巢原理[1]可知，存在 s,t，满足 $0<s<t\leqslant 2^{n^2}$，使得 $R^s=R^t$． ∎

关系的幂运算服从指数律，见下面定理．

定理 2.17 设 $R\subseteq A\times A$，m,n 为任意的自然数，则下面等式成立：

(1) $R^m\circ R^n=R^{m+n}$；

(2) $(R^m)^n=R^{mn}$．

证明 (1) 任给 m 后，对 n 作归纳法．

$n=0$，则 $R^m\circ R^0=R^m\circ I_A=R^m=R^{m+0}$．

假设 $R^m\circ R^n=R^{m+n}$．

$$
\begin{aligned}
R^m\circ R^{n+1} &= R^m\circ(R^n\circ R^1)=(R^m\circ R^n)\circ R^1 \\
&=(R^{m+n})\circ R \qquad\qquad\text{(归纳假设)} \\
&=R^{m+n}\circ R \\
&=R^{m+n+1} \qquad\qquad\text{(幂的定义)} \\
&=R^{m+(n+1)}.
\end{aligned}
$$

请读者自己证明(2)． ∎

定理 2.18 设 $R\subseteq A\times A$，若存在自然数 $s,t(s<t)$，使得 $R^s=R^t$，则下面等式成立：

(1) $R^{s+k}=R^{t+k}$，$k\in N$；

(2) $R^{s+kp+i}=R^{s+i}$，其中 $k,i\in N$，$p=t-s$；

(3) 令 $S=\{R^0,R^1,\cdots,R^{t-1}\}$，则对于任意 $q\in N$，均有 $R^q\in S$．

证明 由定理 2.17.(1) 的成立是显然的．

(2) 用(1)直接证明(2)．$k=0,1$ 时显然，考虑 $k\geqslant 2$．

① 鸽巢原理又叫抽屉原理，它的简单而直观的形式为 $(n+1)$只鸽子飞向 n 个鸽巢，必存在一巢飞入 2 只或 2 只以上的鸽子．一般形式请见组合数学．

$$
\begin{aligned}
& R^{s+kp+i} \\
&= R^{s+k(t-s)+i} \\
&= R^{t+(k-1)(t-s)+i} \\
&= R^{s+(k-1)(t-s)+i} && \text{（利用(1)）} \\
&= R^{s+t-s+(k-2)(t-s)+i} \\
&= R^{t+(k-2)(t-s)+i} \\
&= R^{s+(k-2)(t-s)+i} && \text{（利用(1)）} \\
&\cdots \\
&= R^{s+t-s+i} \\
&= R^{t+i} \\
&= R^{s+i}. && \text{（利用(1)）}
\end{aligned}
$$

请读者用归纳法证明之.

(3) 用(2)证明(3).

若 $q \leq t-1$，结论显然成立. 设 $q \geq t$，则 $q > s$，因而存在 $k, i \in N$，使得

$$
\begin{aligned}
q &= s + k(t-s) + i \qquad (0 \leq i \leq t-s-1) \\
&= s + kp + i \qquad (p = t-s).
\end{aligned}
$$

于是，

$$
\begin{aligned}
R^q &= R^{s+kp+i} \\
&= R^{s+i}. && \text{（由(2)）}
\end{aligned}
$$

而 $s+i \leq s+t-s-1 = t-1$，所以 $R^q \in S$. ▌

由定理 2.16 可知，对于有穷集合上的关系 R 来说，必存在 s, t ($s<t$) 使得 $R^s = R^t$. 再用定理 2.18，可以化简 R 幂的指数. 但对无穷集合来说就不一定存在 s, t，使得 $R^s = R^t$ 了.

【例 2.6】 设 $R \subseteq A \times A$，试化简 R^{100} 的指数.

(1) 已知 $R^7 = R^{15}$；

(2) 已知 $R^3 = R^5$；

(3) 已知 $R^1 = R^4$.

解 用定理 2.18 中的(3).

(1) $R^{[illegible]}=R^{2+[illegible]\times 8+[illegible]}=R^{7}$ [illegible] $R^{12}\in\{R^0,R^1,\cdots,R^{14}\}$.

(2) $R^{1[illegible]}=R^{3+48\times 2+1}=R^{3+1}=R^4\in\{R^0,R^1,\cdots,R^4\}$.

(3) $R^{[illegible]}=R^{[illegible]+4[illegible]\times 2}$ [illegible] $R^{[illegible]}=R^2\in\{R^0,R^1,R^2\}$.

§2.6 关系的闭包

设 A 为一个非空集合，A 上的关系 R 不一定具有讨论过的5种性质中的某些性质，本节讨论最小的包含 R 的关系 R'，使它具有所要求的性质，这就是关系的闭包.

定义 2.13 设 $A\neq\varnothing$，$R\subseteq A\times A$，R 的**自反闭包**（**对称闭包**、**传递闭包**）R' 满足如下条件：

(1) R' 是自反的（对称的、传递的）；

(2) $R\subseteq R'$；

(3) A 上任意的自反的（对称的、传递的）关系 R''，若 $R\subseteq R''$，则 $R'\subseteq R''$.

常用 $r(R)$，$s(R)$，$t(R)$ 分别表示 R 的自反闭包、对称闭包和传递闭包.

【例 2.7】 设 $A=\{1,2,3,4\}$，$R=\{<1,2>,<1,4>,<3,4>\}$，求 $r(R)$，$s(R)$，$t(R)$ 的关系图，然后写出它们的集合表达式.

解

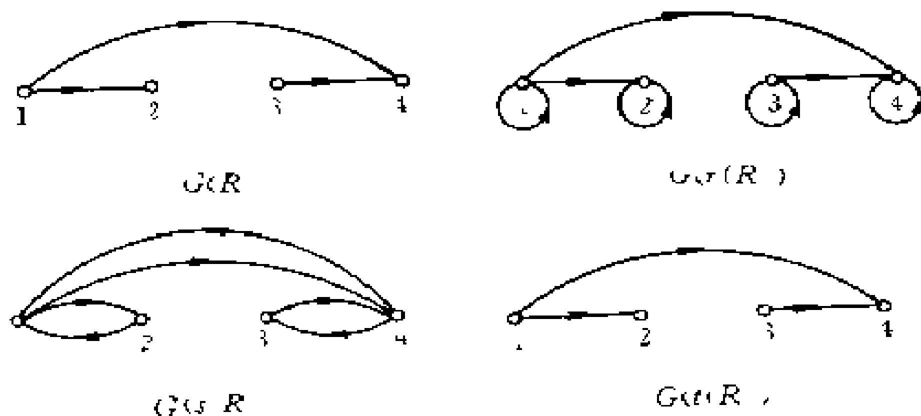


图 2.3

图 2.3 分别给出了 R,$r(R)$,$s(R)$,$t(R)$的关系图.

$r(R)=I_A \cup R$,$s(R)=R \cup \{\langle 2,1\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 1,1\rangle\}$,$t(R)=R$(见定理 2.19).

定理 2.19 设 $R \subseteq A \times A$ 且 $A \neq \varnothing$,则

(1) R 是自反的当且仅当 $r(R)=R$;

(2) R 是对称的当且仅当 $s(R)=R$;

(3) R 是传递的当且仅当 $t(R)=R$;

本定理的证明简单,这里不再赘述.

定理 2.20 设集合 $A \neq \varnothing$,$R_1,R_2 \subseteq A \times A$,且 $R_1 \subseteq R_2$,则

(1) $r(R_1) \subseteq r(R_2)$;

(2) $s(R_1) \subseteq s(R_2)$;

(3) $t(R_1) \subseteq t(R_2)$.

证明 (1) $\forall \langle x,y\rangle \in A \times A$,

若$\langle x,y\rangle \in r(R_1)$,分两种情况讨论:

1) $y=x$,此时必有$\langle x,y\rangle=\langle x,x\rangle \in r(R_2)$;

2) $x \neq y$,

$\langle x,y\rangle \in r(R_1)$

$\Rightarrow \langle x,y\rangle \in R_1$

$\Rightarrow \langle x,y\rangle \in R_2$ $(R_1 \subseteq R_2)$

$\Rightarrow \langle x,y\rangle \in r(R_2)$.

所以,$r(R_1) \subseteq r(R_2)$.

(2) $\forall \langle x,y\rangle \in A \times A$,若$\langle x,y\rangle \in S(R_1)$,则$\langle x,y\rangle \in R_1$或$\langle x,y\rangle \in R_1^{-1}$,分别讨论:

1) $\langle x,y\rangle \in R_1$

$\Rightarrow \langle x,y\rangle \in R_2$ $(R_1 \subseteq R_2)$

$\Rightarrow \langle x,y\rangle \in S(R_2)$.

2) $\langle x,y\rangle \in R_1^{-1}$

$\Rightarrow \langle y,x\rangle \in R_1$

$\Rightarrow \langle y,x\rangle \in R_2$ $(R_1 \subseteq R_2)$

$\Rightarrow \langle x,y\rangle \in s(R_2)$. （由 $s(R_2)$ 具有对称性得）

所以 $s(R_1)\subseteq s(R_2)$.

(3) $\forall \langle x,y\rangle \in A\times A$，若 $\langle x,y\rangle \in t(R_1)$，分两种情况讨论：

① $\langle x,y\rangle \in R_1$

$\Rightarrow \langle x,y\rangle \in R_2$ （$R_1\subseteq R_2$）

$\Rightarrow \langle x,y\rangle \in t(R_2)$.

② $\langle x,y\rangle \notin R_1$

$\Rightarrow \exists t(t\in A \wedge \langle x,t\rangle \in R_1 \wedge \langle t,y\rangle \in R_1)$

$\Rightarrow \exists t(t\in A \wedge \langle x,t\rangle \in R_2 \wedge \langle t,y\rangle \in R_2)$

$\Rightarrow \langle x,y\rangle \in t(R_2)$. ▌

定理 2.21 设 $A\neq\emptyset$，$R_1,R_2\subseteq A\times A$，则下列各式成立：

(1) $r(R_1\cup R_2)=r(R_1)\cup r(R_2)$；

(2) $s(R_1\cup R_2)=s(R_1)\cup s(R_2)$；

(3) $t(R_1)\cup t(R_2)\subseteq t(R_1\cup R_2)$.

证明

(1) $R_1\subseteq r(R_1)\wedge R_2\subseteq r(R_2)$

$\Rightarrow R_1\cup R_2\subseteq r(R_1)\cup r(R_2)$

$\Rightarrow r(R_1\cup R_2)\subseteq r(R_1)\cup r(R_2)$.

由 $r(R_1)\cup r(R_2)$ 是自反的以及自反关系的定义可知最后一步是成立的（关于 $r(R_1)\cup r(R_2)$ 是自反的请证明之）.

又 $R_1\subseteq R_1\cup R_2 \wedge R_2\subseteq R_1\cup R_2$

$\Rightarrow r(R_1)\subseteq r(R_1\cup R_2)\wedge r(R_2)\subseteq r(R_1\cup R_2)$ （定理 2.20）

$\Rightarrow r(R_1)\cup r(R_2)\subseteq r(R_1\cup R_2)$.

所以，(1)式成立.

类似可证(2)成立.

(3) $R_1\subseteq R_1\cup R_2 \wedge R_2\subseteq R_1\cup R_2$

$\Rightarrow t(R_1)\subseteq t(R_1\cup R_2)\wedge t(R_2)\subseteq t(R_1\cup R_2)$ （定理 2.20）

$\Rightarrow t(R_1)\cup t(R_2)\subseteq t(R_1\cup R_2)$. ▌

注意,定理 2.21(3)中的等号不一定成立,即 $t(R_1\cup R_2)\subseteq t(R_1)\cup t(R_2)$ 不一定成立。举反例如下:

取 $A=\{a,b,c\}$,$R_1=\{<a,b>,<b,c>\}$,$R_2=\{<c,a>\}$,则 $t(R_1)\cup t(R_2)=\{<a,b>,<b,c>,<a,c>,<c,a>\}$(此关系不是传递的),而 $t(R_1\cup R_2)=E_A$(即 A 上的全域关系),显然,$E_A\nsubseteq t(R_1)\cup t(R_2)$.

定理 2.22 设 $R\subseteq A\times A$ 且 $A\neq\varnothing$,则

$$r(R)=R\cup I_A.$$

证明 $R\cup I_A$ 是自反的是显然的.

$R\subseteq R\cup I_A$

$\Rightarrow r(R)\subseteq r(R\cup I_A)$ (定理 2.20)

$\Rightarrow r(R)\subseteq R\cup I_A$ (因为 $R\cup I_A$ 是自反的及定理 2.19)

又

$R\subseteq r(R)\wedge I_A\subseteq r(R)$

$\Rightarrow R\cup I_A\subseteq r(R)$.

所以,$r(R)=R\cup I_A$. ▌

定理 2.23 设 $R\subseteq A\times A$ 且 $A\neq\varnothing$,则

$$s(R)=R\cup R^{-1}.$$

证明 首先请读者证明 $R\cup R^{-1}$ 是对称的.

$R\subseteq R\cup R^{-1}$

$\Rightarrow s(R)\subseteq s(R\cup R^{-1})$ (定理 2.20)

$\Rightarrow s(R)\subseteq R\cup R^{-1}$ (由定理 2.19 知 $s(R\cup R^{-1})=R\cup R^{-1}$)

又 $R\subseteq s(R)\wedge R^{-1}\subseteq s(R)$ (*)

$\Rightarrow R\cup R^{-1}\subseteq s(R)$.

综上所述,$s(R)=R\cup R^{-1}$.

(*)

$\forall x,y\in A$,若

$<x,y>\in R$

$\Rightarrow <y,x>\in R^{-1}$

$\Rightarrow \langle y,x\rangle \in s(R)$

$\Rightarrow \langle x,y\rangle \in s(R)$.

所以，$R^{-1} \subseteq s(R)$. ▌

定理 2.24 设 $R\subseteq A\times A$ 且 $A\neq\varnothing$，则

$t(R)=R\cup R^2\cup\cdots$.

为了证明定理首先证明如下的两个命题.

命题 1 $R\cup R^2\cup\cdots$ 是传递的.

证明 $\forall x,y,z\in A$,

$\langle x,y\rangle\in R\cup R^2\cup\cdots \wedge \langle y,z\rangle \in R\cup R^2\cup\cdots$

$\Rightarrow \exists s(\langle x,y\rangle\in R^s)\wedge\exists t(\langle y,z\rangle\in R^t)$

$\Rightarrow \langle x,z\rangle \in R^s\circ R^t = R^{s+t}\subseteq R\cup R^2\cup\cdots$.

所以，$R\cup R^2\cup\cdots$ 是传递的. ▌

命题 2 对于任意的非零自然数 n，有

$$R^n\subseteq t(R).$$

证明 对 n 作归纳法.

$n=1$ 时，$R\subseteq t(R)$ 显然.

设 $n=k$ 时，$R^k\subseteq t(R)$，

$n=k+1$ 时，证明如下：

$\forall x,y\in A$,

$\langle x,y\rangle\in R^{k+1}=R^k\circ R$

$\Leftrightarrow \exists t(\langle x,t\rangle\in R\wedge\langle t,y\rangle\in R^k)$

$\Rightarrow \exists t(\langle x,t\rangle\in t(R)\wedge\langle t,y\rangle\in t(R))$ （归纳假设）

$\Rightarrow \langle x,y\rangle\in t(R)$.

所以，$R^{k+1}\subseteq t(R)$. ▌

下面证明定理.

$R\subseteq R\cup R^2\cup\cdots$

$\Rightarrow t(R)\subseteq t(R\cup R^2\cup\cdots)$ （定理 2.20）

$\Rightarrow t(R)\subseteq R\cup R^2\cup\cdots$. （命题 1 和定理 2.19）

又由命题 2 可知，

$$R\subseteq t(R), R^2\subseteq t(R^2), \cdots$$

$$\Rightarrow R\cup R^2\cup\cdots\subseteq t(R).$$

综上所述，$t(R)=R\cup R^2\cup\cdots$. ▌

推论 设 A 为非空且为有穷集合，$R\subseteq A\times A$，则存在自然数 l，使得

$$t(R)=R\cup R^2\cup\cdots\cup R^l$$

证明 由定理 2.16 可知，存在自然数 $s,t,s<t$，使得 $R^s=R^t$. 再由定理 2.18 可知 $R,R^2,\cdots\in\{R,R^2,\cdots,R^{t-1}\}$，取 $l=t-1$，由定理 2.24 可知，

$$t(R)=R\cup R^2\cup\cdots\cup R^l.$$ ▌

【例 2.8】 设 $A=\{a,b,c,d\}$，$R=\{<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>\}$，求 $r(R),s(R),t(R)$.

解 $r(R)=R\cup I_A=\{<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>\}\cup I_A$. 今后，凡自反的关系 R，均可以写成 $(R-I_A)\cup I_A=R'\cup I_A$ 的形式.

$$s(R)=R\cup R^{-1}=\{<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>,<c,b>,<d,c>\}.$$

经过运算不难发现，

$$R^{2k}=R^2, k=1,2,\cdots,$$

$$R^{2k+1}=R^3, k=1,2,\cdots.$$

其中，

$$R^2=\{<a,a>,<b,b>,<a,c>,<b,d>\},$$

$$R^3=\{<a,b>,<b,a>,<b,c>,<a,d>\}.$$

所以，

$$t(R)=R\cup R^2\cup R^3=\{<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>,<a,a>,<b,b>,<a,c>,<b,d>,<a,d>\}.$$

其实，可以用关系矩阵的幂求 $t(R)$ 的关系矩阵，然后由关系矩阵求 $t(R)$ 的集合表达式或关系图.

若 A 是有穷集合，$R\subseteq A\times A$，则

$$M(t(R))=M(R)+M(R^2)+\cdots+M(R^4)$$
$$=M(R)+M^2(R)+\cdots+M^4(R).$$

注意,矩阵运算中的加法为逻辑加法.

在本例中,

$$M(R)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$M(R^2)=M^2(R)=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$M(R^3)=M^3(R)=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

而

$$\begin{aligned}M(R^{2k})&=M^2(R),\\ M(R^{2k+1})&=M^3(R),\end{aligned}\quad k=1,2,\cdots$$

所以,

$$M(t(R))=M(R)+M^2(R)+M^3(R)$$
$$=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

由$M(t(R))$容易写出$t(R)$的集合表达式.

定理 2.25 设$R\subseteq A\times A$且$A\neq\varnothing$,则

(1) 若R是自反的,则$s(R)$和$t(R)$也是自反的;

(2) 若R是对称的,则$r(R)$和$t(R)$也是对称的;

(3) 若 R 是传递的，则 $r(R)$ 也是传递的.

证明 (1) 证明简单.

(2) 只证 $t(R)$ 是对称的.

先证明下面命题

命题 若 R 是对称的，则对于任意的自然数 $n\geq 1$，R^n 也是对称的.

用归纳法证明.

$n=1$ 时显然成立.

设 $n=k$ 时结论成立.

设 $n=k+1$，$\forall x,y\in A$，

$<x,y>\in R^{k+1}=R^k\circ R$

$\Rightarrow \exists t(<x,t>\in R\wedge <t,y>\in R^k)$

$\Rightarrow \exists t(<t,x>\in R\wedge <y,t>\in R^k)$ （归纳假设）

$\Leftrightarrow <y,x>\in R\circ R^k$

$\Leftrightarrow <y,x>\in R^{k+1}$. （合成运算满足结合律）

所以，命题为真.

下面证明 $t(R)$ 的对称性

$\forall x,y\in A$，

$<x,y>\in t(R)$

$\Leftrightarrow <x,y>\in R\cup R^2\cup\cdots$ （定理 2.24）

$\Rightarrow \exists n(<x,y>\in R^n)$

$\Rightarrow \exists n(<y,x>\in R^n)$ （命题）

$\Rightarrow <y,x>\in R\cup R^2\cup\cdots$

$\Leftrightarrow <y,x>\in t(R)$.

所以，$t(R)$ 是对称的.

(3) $\forall x,y,z\in A$，

$<x,y>,<y,z>\in r(R)=I_A\cup R$ （定理 2.22）

$\Rightarrow <x,y>,<y,z>\in I_A\vee <x,y>,<y,z>\in R$

$\vee <x,y>\in I_A\wedge <y,z>\in R\vee <x,y>\in R\wedge <y,z>\in$

I_A.

下面分4种情况讨论：

(1) $\langle x,y\rangle,\langle y,z\rangle\in I_A$

$\Rightarrow x=y=z$

$\Rightarrow \langle x,z\rangle=\langle x,x\rangle\in I_A$

$\Rightarrow \langle x,z\rangle=\langle x,x\rangle\in I_A\cup R=r(R)$.

(2) $\langle x,y\rangle,\langle y,z\rangle\in R$

$\Rightarrow \langle x,z\rangle\in R$ （R传递）

$\Rightarrow \langle x,z\rangle\in R\cup I_A=r(R)$.

(3) $\langle x,y\rangle\in I_A\wedge\langle y,z\rangle\in R$

$\Rightarrow x=y\wedge\langle y,z\rangle\in R$

$\Rightarrow \langle x,z\rangle\in R$

$\Rightarrow \langle x,z\rangle\in r(R)$.

(4) $\langle x,y\rangle\in R\wedge\langle y,z\rangle\in I_A$

$\Rightarrow \langle x,y\rangle\in R\wedge y=z$

$\Rightarrow \langle x,z\rangle\in R$

$\Rightarrow \langle x,z\rangle\in r(R)$.

定理2.26 设 $R\subseteq A\times A\wedge A\neq\varnothing$，则

(1) $rs(R)=sr(R)$；

(2) $rt(R)=tr(R)$；

(3) $st(R)\subseteq ts(R)$.

证明 先证下面两个命题（请读者自己证明）：

命题1 $(R_1\cup R_2)^{-1}=R_1^{-1}\cup R_2^{-1}$.

命题2 $(R\cup I_A)^n=I_A\cup R\cup R^2\cup\cdots\cup R^n,(n\geqslant 1)$.

以下证明定理

(1) $sr(R)$

$=s(R\cup I_A)$ （定理2.22）

$=(R\cup I_A)\cup(R\cup I_A)^{-1}$ （定理2.23）

$=R\cup I_A\cup R^{-1}\cup I_A^{-1}$ （命题1）

$= R \cup R^{-1} \cup I_A \qquad (I_A^{-1} = I_A)$

$= s(R) \cup I_A$

$= r(s(R))$

$= rs(R)$

(2) $tr(R)$

$= t(R \cup I_A)$

$= (R \cup I_A) \cup (R \cup I_A)^2 \cup \cdots$ （定理 2.24）

$= I_A \cup R \cup R^2 \cup \cdots$ （命题 2）

$= I_A \cup t(R)$ （定理 2.24）

$= r(t(R))$

$= rt(R)$

(3) $R \subseteq s(R)$

$\Rightarrow t(R) \subseteq ts(R)$ （定理 2.20）

$\Rightarrow st(R) \subseteq sts(R)$. （定理 2.20）

由定理 2.25 和定理 2.19 可知 $sts(R) = ts(R)$，因而，

$$st(R) \subseteq ts(R).$$ ∎

请读者举例说明定理 2.26 中，(3)的反包含不一定成立.

§ 2.7 等价关系和划分

定义 2.14 设 $R \subseteq A \times A$ 且 $A \neq \varnothing$，若 R 是自反的、对称的和传递的，则称 R 为 A 上的等价关系，简称**等价关系**.

【例 2.9】 设 A 为某班学生的集合，讨论下列关系中，哪些是等价关系.

(1) $R_1 = \{\langle x,y\rangle \mid x,y \in A \wedge x$ 与 y 同年生$\}$；

(2) $R_2 = \{\langle x,y\rangle \mid x,y \in A \wedge x$ 与 y 同姓$\}$；

(3) $R_3 = \{\langle x,y\rangle \mid x,y \in A \wedge x$ 的年龄不比 y 小$\}$；

(4) $R_4 = \{\langle x,y\rangle \mid x,y \in A \wedge x$ 与 y 选修同门课程$\}$；

(5) $R_5 = \{\langle x,y\rangle \mid x,y \in A \wedge x$ 的体重比 y 重$\}$.

解 易知 R_1, R_4 都具有自反、对称和传递性，因而都是等价关系，R_3 无对称性，R_2 无传递性，R_5 既无自反性又无对称性，因而它们都不是等价关系.

【例 2.10】 设 $R\subseteq A\times A$ 且 $A\neq\varnothing$. 对 R 依次进行 3 种闭包运算有 6 种不同的顺序，其中哪些顺序产生的关系一定是等价关系？并且证明所得结论.

解 对 R 依次进行 3 种闭包运算有 6 种不同的顺序，产生的关系分别为：$tsr(R)$、$trs(R)$、$str(R)$、$srt(R)$、$rst(R)$、$rts(R)$，其中，$tsr(R)$、$trs(R)$、$rts(R)$ 3 种关系一定为等价关系，其余的 3 种不一定是等价关系.

由定理 2.26 的(1)、(2)可知，$tsr(R)=trs(R)$，又，$rts(R)=trs(R)=tsr(R)$，于是有

$$tsr(R)=trs(R)=rts(R).$$

类似可证

$$str(R)=srt(R)=rst(R).$$

综上所述，6 种不同顺序的闭包运算只产生两种可能不同的关系，只需证 $tsr(R)$ 是等价关系，而 $str(R)$ 不一定是等价关系.

其实，由定理 2.25 立刻可证 $tsr(R)$ 具有自反性，对称性和传递性，因而是等价关系.

而因为传递关系的对称闭包不一定是传递的，因而 $str(R)$ 不一定是等价关系，反例如下.

设 $A=\{a,b,c\}$，$R=\{\langle a,b\rangle,\langle c,b\rangle\}$，易知，

$$str(R)=I_A\cup\{\langle a,b\rangle,\langle c,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle\}$$

这个关系不具有传递性，因而不是等价关系.

因为 $tsr(R)$ 是含 R 的最小的等价关系，因而常称 $tsr(R)$ 为 R 的等价闭包.

定义 2.15 设 R 是非空集合 A 上的等价关系，$\forall x\in A$，令 $[x]_R=\{y\mid y\in A\wedge xRy\}$，则称 $[x]_R$ 为 x 的关于 R 的**等价类**，简称为 x 的等价类. 在不引起混乱时，可将 $[x]_R$ 简记为 $[x]$.

【例 2.11】 设 $A\subseteq N$ 且 $A\neq\varnothing$，令

$$R_n=\{<x,y>\mid x,y\in A\wedge x\equiv y\pmod n\},\ n\geq 2.$$

(1) 证明 R_n 是 A 上的等价关系；

(2) 设 $A=\{1,2,3,4,5,8\}$，求

$$R_3=\{<x,y>\mid x,y\in A\wedge x\equiv y\pmod 3\}$$

的等价类，并画出 R_3 的关系图.

解 (1) 留给读者.

(2) $[1]=[4]=\{1,4\}$，

$[2]=[5]=[8]=\{2,5,8\}$，

$[3]=\{3\}$.

R_3 的关系图为图 2.4 所示.

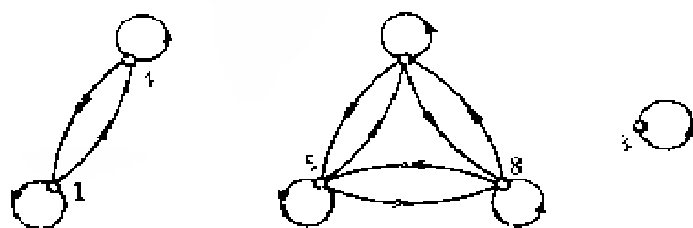


图 2.4

定理 2.27 设 R 是非空集合 A 上的等价关系，对于任意的 $x,y\in A$，下面各式成立：

(1) $[x]_R\neq\varnothing$ 且 $[x]_R\subseteq A$；

(2) 若 $<x,y>\in R$，则 $[x]_R=[y]_R$；

(3) 若 $<x,y>\notin R$，则 $[x]_R\cap[y]_R=\varnothing$；

(4) $\bigcup\{[x]_R\mid x\in A\}=A$.

证明 (1) 由 R 的自反性得知 $x\in[x]_R$，故 $[x]_R\neq\varnothing$

(2) 已知 $<x,y>\in R\Leftrightarrow xRy$，$\forall z$，

$z\in[x]_R\wedge xRy$

$\Rightarrow xRz\wedge xRy$

$\Rightarrow zRx\wedge xRy$ （R 是对称的）

$\Rightarrow zRy$ （R 是传递的）

$\Rightarrow z\in[y]_R$.

所以，$[x]_R\subseteq[y]_R$，类似可证$[y]_R\subseteq[x]_R$，因而$[x]_R=[y]_R$.

(3) 用反证法证明之.

已知$\langle x,y\rangle\notin R$，若$[x]_R\cap[y]_R\neq\varnothing$，则

$\langle x,y\rangle\notin R\wedge[x]_R\cap[y]_R\neq\varnothing$

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle\notin R\wedge\exists z(z\in[x]_R\wedge z\in[y]_R)$

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle\notin R\wedge\exists z(\langle x,z\rangle\in R\wedge\langle y,z\rangle\in R)$

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle\notin R\wedge\exists z(\langle x,z\rangle\in R\wedge\langle z,y\rangle\in R)$ （R 对称）

$\Rightarrow \langle x,y\rangle\notin R\wedge\langle x,y\rangle\in R$. （$R$ 传递）

这是个矛盾，所以，当$\langle x,y\rangle\notin R$时，$[x]_R\cap[y]_R=\varnothing$.

(4) $\forall y$,

$y\in\bigcup\{[x]_R \mid x\in A\}$

$\Rightarrow\exists z(z\in A\wedge y\in[z]_R)$

$\Rightarrow y\in A$.

因而，$\bigcup\{[x]_R \mid x\in A\}\subseteq A$.

$\forall y$,

$y\in A\Rightarrow y\in[y]_R\subseteq\bigcup\{[x]_R \mid x\in A\}$.

所以，$A\subseteq\bigcup\{[x]_R \mid x\in A\}$.

故有$\bigcup\{[x]_R \mid x\in A\}=A$. ▌

定义 2.16 设 R 是非空集合 A 上的等价关系，以关于 R 的全体不同的等价类为元素的集合称作 A 关于 R 的**商集**，简称 A 的商集，记作 A/R.

由定理 2.27 可知，A/R 的任何一个元素都是不空的，且$\bigcup A/R=A$.

例 2.11(2)中，$A/R=\{[1],[2],[3]\}$

$=\{\{1,4,7\},\{2,5,8\},\{3,6\}\}$.

【例 2.12】 设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，$n\geq1$.

(1) 验证 E_A，I_A，$R_1=I_A\cup\{\langle a_1,a_2\rangle,\langle a_2,a_1\rangle\}$都是 A 上的

等价关系，并求它们对应的商集，其中 $a_i, a_j \in A$ 且 $i \neq j$. $\varnothing$ 是 A 上的等价关系吗？

(2) $A=\{a,b,c\}$，试求出 A 上的全体等价关系及其对应的商集.

解 (1) E_A, I_A, R_{ij} 是等价关系是显然的.

$$A/I_A=\{\{a_1\},\{a_2\},\cdots,\{a_n\}\},$$

$$A/E_A=\{\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\},$$

$A/R_{ij}=\{\{a_i,a_j\},\{a_{k_1}\},\{a_{k_2}\},\cdots,\{a_{k_{n-2}}\}\}$，其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-2}$ 均不等于 i 或 j. 共有 C_n^2 个.

因为 $\varnothing$ 无自反性，所以 $\varnothing$ 不是 A 上的等价关系.

(2) 按(1)中 $n=3$ 的情况，$A=\{a,b,c\}$ 上有 5 种不同的等价关系：

E_A，其商集为 $A/E_A=\{\{a,b,c\}\}$；

I_A，其商集为 $A/I_A=\{\{a\},\{b\},\{c\}\}$；

$R_1=I_A\cup\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle\}$，$A/R_1=\{\{a,b\},\{c\}\}$；

$R_2=I_A\cup\{\langle a,c\rangle,\langle c,a\rangle\}$，$A/R_2=\{\{a,c\},\{b\}\}$；

$R_3=I_A\cup\{\langle b,c\rangle,\langle c,b\rangle\}$，$A/R_3=\{\{b,c\},\{a\}\}$；

A 上还有其余的等价关系吗？我们知道，A 上共有 $2^9=512$ 个不同的二元关系，不能用逐个验证的方法去找等价关系，可用对 A 的划分（下面介绍）来寻找 A 上的等价关系.

定义 2.17 设 A 为非空集合，若存在 A 的一个子集族 $\mathscr{A}$ 满足：

(1) $\varnothing\notin\mathscr{A}$；

(2) $\forall x,y\in\mathscr{A}$ 且 $x\neq y$，则 $x\cap y=\varnothing$；

(3) $\bigcup\mathscr{A}=A$.

则称 $\mathscr{A}$ 为 A 的一个**划分**. $\mathscr{A}$ 中元素称为**划分块**.

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是某个集 E 的非空真子集.

$\mathscr{A}_i=\{A_i,\sim A_i\}$，$i=1,2,\cdots,n$，

$\mathscr{A}_{ij}=\{A_i\cap A_j,\sim A_i\cap A_j,A_i\cap\sim A_j,\sim A_i\cap\sim A_j\}$，$i,j=1,2,$

$\cdots, n$，且 $i \neq j\}$，

$\cdots$

$\mathscr{A}_n = \{\sim A_1 \cap \sim A_2 \cap \cdots \cap \sim A_n, \sim A_1 \cap \sim A_2 \cap \cdots \cap \sim A_{n-1} \cap A_n, \cdots, A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n\}$。

若将以上各集中的空元素均去掉，则这些集族都是 A 的划分。

定理 2.28 设 A 为一个非空集合。

(1) 设 R 为 A 上的任意一个等价关系，

则对应 R 的商集 A/R 为 A 的一个划分；

(2) 设 $\mathscr{A}$ 为 A 的任一个划分，令

$R_{\mathscr{A}} = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in A \wedge x, y$ 属于 $\mathscr{A}$ 的同一划分块$\}$，则 $R_{\mathscr{A}}$ 为 A 上的等价关系。

本定理证明留给读者。

本定理说明，非空集合 A 上的等价关系与 A 的划分是一一对应的，于是 A 上有多少个不同的等价关系，就产生同样个数的不同的划分，反之亦然。

给定 $n(n \geq 1)$ 元集合 A，若能求出 A 上的全部的划分，也就求出了 A 上的全部的等价关系。那么如何求出 A 的全部划分呢？这要建立下面数学模型：

将 n 个不同的球放入 r 个相同的盒中去，并且要求无空盒，问有多少种不同的放法？这里要求 $n \geq r$。

不同的放球方法数即为 n 元集 A 的不同的划分数。如何求出不同的放球方法数呢，这要靠组合数学中的第二类 Stirling 数。

简单说来是这样的，设 $\left\{ n \atop r \right\}$ 表示将 n 个不同的球放入 r 个相同的盒中的方案数，称 $\left\{ n \atop r \right\}$ 为第二类 Stirling 数，它有下面性质：

1° $\left\{ n \atop 0 \right\} = 0$，$\left\{ n \atop 1 \right\} = 1$，$\left\{ n \atop 2 \right\} = 2^{n-1} - 1$，$\left\{ n \atop n-1 \right\} = C_n^2$，

$\left\{ n \atop n \right\} = 1$。

2° 满足如下的递推公式：

$$\left\{ {n \atop r} \right\} = r\left\{ {n-1 \atop r} \right\} + \left\{ {n-1 \atop r-1} \right\}.$$

关于第二类Stirling数更详细的内容请见组合数学.

【例2.13】 问集合$A=\{a,b,c,d\}$上有多少不同的等价关系？

解 A上共有2^{16}个二元关系，从中找出等价关系是困难的，利用定理2.28可先求出A上的全部划分，A上的等价关系也就容易求出了.

显然，不同的划分个数为

$$\left\{ {4 \atop 1} \right\} + \left\{ {4 \atop 2} \right\} + \left\{ {4 \atop 3} \right\} + \left\{ {4 \atop 4} \right\} = 1 + (2^3 - 1) + \binom{4}{2} + 1 = 15,$$

因而，A上共有15个不同的等价关系.

定义2.18 设$\mathscr{A}$和$\mathscr{A}'$都是集合A的划分，若$\mathscr{A}$的每个划分块都含于$\mathscr{A}'$的某个划分块中，则称$\mathscr{A}$是$\mathscr{A}'$的**加细**.

易知，$\mathscr{A}$是$\mathscr{A}'$的加细当且仅当$R_{\mathscr{A}} \subseteq R_{\mathscr{A}'}$.

【例2.14】 设$A=\{a,b,c\}$，找出A的全部划分及对应的等价关系，以及划分间的加细和关系中的包含关系.

解 由第二类Stirling数易知，A上共有5个划分：

$\mathscr{A}_1 = \{\{a,b,c\}\}$,

$\mathscr{A}_2 = \{\{a\},\{b,c\}\}$,

$\mathscr{A}_3 = \{\{b\},\{a,c\}\}$,

$\mathscr{A}_4 = \{\{c\},\{a,b\}\}$,

$\mathscr{A}_5 = \{\{a\},\{b\},\{c\}\}$.

它们对应的等价关系分别为

$R_{\mathscr{A}_1} = E_A$,

$R_{\mathscr{A}_2} = I_A \cup \{\langle b,c\rangle,\langle c,b\rangle\}$,

$R_{\mathscr{A}_3} = I_A \cup \{\langle a,c\rangle,\langle c,a\rangle\}$,

$R_{\mathscr{A}_4} = I_A \cup \{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle\}$,

$R_{\mathscr{A}_5}=I_A$.

$\mathscr{A}_2$, $\mathscr{A}_3$, $\mathscr{A}_4$, $\mathscr{A}_5$ 都是 $\mathscr{A}_1$ 的加细，$R_{\mathscr{A}_2}$, $R_{\mathscr{A}_3}$, $R_{\mathscr{A}_4}$, $R_{\mathscr{A}_5}$ 都是 $R_{\mathscr{A}_1}$ 的子集，$\mathscr{A}_5$ 又是 $\mathscr{A}_2$, $\mathscr{A}_3$, $\mathscr{A}_4$ 的加细，$R_{\mathscr{A}_5}$ 是 $R_{\mathscr{A}_2}$, $R_{\mathscr{A}_3}$, $R_{\mathscr{A}_4}$ 的子集.

至此可知例 2.12(2)中遗留的问题已彻底解决了，即 $A=\{a,b,c\}$ 只有 5 种不同的划分，因而 A 上也只有 5 种不同的等价关系.

§2.8 序 关 系

定义 2.19 设 $R\subseteq A\times A$ 且 $A\neq\varnothing$，若 R 是自反的、反对称的和传递的，则称 R 是 A 上的**偏序关系**. 人们常将偏序关系 R 记成 $\leqslant$，并且将 $\langle x,y\rangle\in R$(或 xRy)记为 $x\leqslant y$，读作“x 小于等于 y”，根据 $\leqslant$ 的不同涵义，又可以有各种不同的记法，请看下例.

【例 2.15】 (1) 设 A 是实数集合的非空子集.

$$\leqslant=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A\wedge x\leqslant y\}$$

与

$$\geqslant=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A\wedge x\geqslant y\}$$

分别称为 A 上的小于等于关系和大于等于关系，易知，它们都是 A 上的偏序关系.

(2) 设 A 为正整数集 Z_+ 的非空子集，称

$$|=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A\wedge x|y\}$$

为 A 上的整除关系，不难验证 | 为偏序关系.

(3) 设 A 为一集合，$\mathscr{A}$ 为 A 的子集族，称

$$\subseteq=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in\mathscr{A}\wedge x\subseteq y\}$$

为 $\mathscr{A}$ 上的包含关系，易知 $\subseteq$ 为偏序关系.

设 $A=\{a,b\}$，考虑 A 的下面 3 个子集族：

$\mathscr{A}_1=\{\varnothing,\{a\},\{b\}\}$，$\mathscr{A}_2=\{\{a\},\{a,b\}\}$，$\mathscr{A}_3=P(A)$，它们

| 为竖线段，$a|b$ 表示 a 整除 b，如 2|4，3|6…

对应的包含关系分别为：

$\subseteq_1 = I_{\mathscr{A}_1} \cup \{<\varnothing,\{a\}>,<\varnothing,\{b\}>\}$;

$\subseteq_2 = I_{\mathscr{A}_2} \cup \{<\{a\},\{a,b\}>\}$;

$\subseteq_3 = I_{\mathscr{A}_3} \cup \{<\varnothing,\{a\}>,<\varnothing,\{b\}>,<\varnothing,\{a,b\}>,<\{a\},\{a,b\}>,<\{b\},\{a,b\}>\}$.

$\subseteq_1,\subseteq_2,\subseteq_3$ 分别为 $\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2,\mathscr{A}_3$ 上的偏序关系.

(4) 设 A 为非空集合，π 是由 A 的一些划分组成的集合，称

$$\preccurlyeq_{加细} = \{<x,y> \mid x,y\in\pi \land x 是 y 的加细\}$$

为 π 上的加细关系，易知 $\preccurlyeq_{加细}$ 是偏序关系.

设 $A=\{a,b,c\}$，由例 2.14 可知，$\mathscr{A}_1=\{\{a,b,c\}\}$，$\mathscr{A}_2=\{\{a\},\{b,c\}\}$，$\mathscr{A}_3=\{\{b\},\{a,c\}\}$，$\mathscr{A}_4=\{\{c\},\{a,b\}\}$，$\mathscr{A}_5=\{\{a\},\{b\},\{c\}\}$都是 A 的划分. 取

$\pi_1=\{\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2\}$，$\pi_2=\{\mathscr{A}_2,\mathscr{A}_3\}$，$\pi_3=\{\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2,\mathscr{A}_3,\mathscr{A}_4,\mathscr{A}_5\}$，它们对应的加细关系分别为：

$\preccurlyeq_1 = I_{\pi_1} \cup \{<\mathscr{A}_2,\mathscr{A}_1>\}$,

$\preccurlyeq_2 = I_{\pi_2}$,

$\preccurlyeq_3 = I_{\pi_3} \cup \{<\mathscr{A}_2,\mathscr{A}_1>,<\mathscr{A}_3,\mathscr{A}_1>,<\mathscr{A}_4,\mathscr{A}_1>,<\mathscr{A}_5,\mathscr{A}_1>,<\mathscr{A}_5,\mathscr{A}_2>,<\mathscr{A}_5,\mathscr{A}_3>,<\mathscr{A}_5,\mathscr{A}_4>\}$

$\preccurlyeq_1,\preccurlyeq_2,\preccurlyeq_3$ 分别为 π_1,π_2,π_3 上的偏序关系.

定义 2.20 称一个非空集合 A 及其 A 上的一个偏序关系 $\preccurlyeq$ 组成的有序二元组 $<A,\preccurlyeq>$ 为一个**偏序集**.

在例 2.15 中，(1) 中的 $<A,\leqslant>$，$<A,\geqslant>$，(2) 中的 $<A,|>$，(3) 中的 $<\mathscr{A},\subseteq>$，(4) 中的 $<\pi,\preccurlyeq_{加细}>$ 等都是偏序集.

定义 2.21 设 $<A,\preccurlyeq>$ 为一个偏序集，若对于 $\forall x,y\in A$，如果 $x\preccurlyeq y \lor y\preccurlyeq x$，则称 x 与 y 是**可比的**. 若 x 与 y 是可比的，且 $x\prec y$（即 $x\preccurlyeq y \land x\neq y$），但不存在 $z\in A$，使得 $x\prec z\prec y$，则称 y **覆盖** x.

用定义 2.21 提供的术语，根据偏序关系的特点，可以将偏序关系的关系图画得简单些，这就是**哈斯图**.

哈斯图的具体画法如下：

(1) 省去关系图中的每个顶点处的环；

(2) 若 $x \prec y$ 且 y 覆盖 x，将代表 y 的顶点放在代表 x 的顶点之上，并在 x 与 y 之间连线，省去有向边的箭头，使其成为无向边. 若 $x \prec y$，但 y 不覆盖 x，则省掉 x 与 y 顶点之间的连线.

【例 2.16】 画出下列各偏序关系的哈斯图.

(1) $<A, |>$，其中 $A=\{1,2,3,4,5,6,9,10,15\}$.

(2) $<\mathscr{A}, \subseteq>$，其中 $\mathscr{A}=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{b,c\},\{a,c\}\}$ 为 $A=\{a,b,c\}$ 的子集族；

(3) $<\pi, \leqslant_{加细}>$，$\pi=\{\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2,\cdots,\mathscr{A}_6\}$，$\mathscr{A}_i(i=1,2,\cdots 6)$ 都是 $A=\{a,b,c,d\}$ 的划分，其中，

$\mathscr{A}_1=\{\{a\},\{b\},\{c\},\{d\}\}$，

$\mathscr{A}_2=\{\{a,b\},\{c,d\}\}$，

$\mathscr{A}_3=\{\{a,c\},\{b,d\}\}$，

$\mathscr{A}_4=\{\{a\},\{b,c,d\}\}$，

$\mathscr{A}_5=\{\{a\},\{b\},\{c,d\}\}$，

$\mathscr{A}_6=\{\{a,b,c,d\}\}$.

解 本题中(1)、(2)、(3)的哈斯图分别由图 2.5 中的图(a)，(b)，(c)所示.

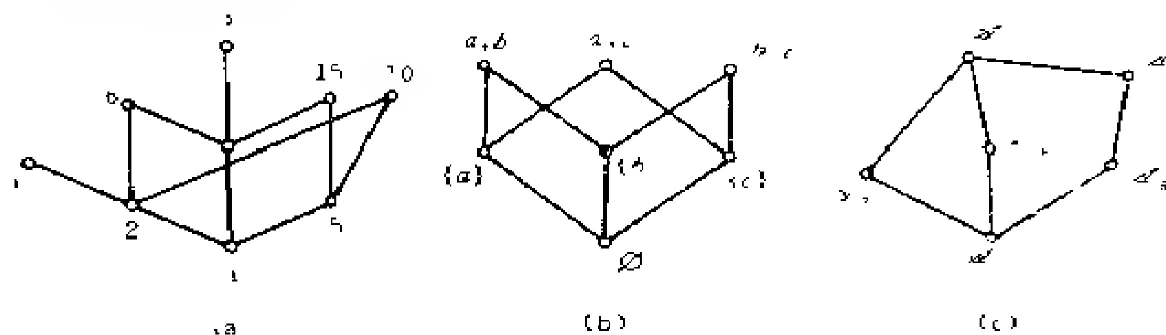


图 2.5

定义 2.22 设$\langle A,\preccurlyeq\rangle$为偏序集. 若$\forall x,y\in A$, x与y均可比，则称$\preccurlyeq$为A上的**全序关系**或**线序关系**，此时称$\langle A,\preccurlyeq\rangle$为**全序集**.

设A为实数集的非空子集，则$\langle A,\leqslant\rangle$和$\langle A,\geqslant\rangle$均为全序集，即$\leqslant$和$\geqslant$是全序关系.

不难看出，哈斯图为从下至上的"一条线". 这是全序关系的必要条件，同时也为充分条件.

定义 2.23 设$R\subseteq A\times A$且$A\neq\varnothing$. 若R是反自反的和传递的，则称R为A上的**拟序关系**，常将R记成$\prec$，并称$\langle A,\prec\rangle$为**拟序集**.

其实，拟序关系也具有反对称性，并且偏序关系与拟序关系有互相转化的关系.

定理 2.29 设$\preccurlyeq$为非空集合A上的偏序关系，$\prec$为A上的拟序关系，则

(1) $\prec$是反对称的；

(2) $\preccurlyeq-I_A$为A上的拟序关系；

(3) $\prec\cup I_A$为A上的偏序关系.

本定理的证明留给读者.

由本定理可知，拟序关系$\prec$必有反对称性，但由于反对称性是反自反性和传递性的必然结果，为了简洁起见，拟序关系的定义中未加反对称性. 另外还可以看出，偏序关系与拟序关系的本质区别在于前者具有自反性，后者具有反自反性，但它们是可以互相转化的. 而它们的共同实质是均具有反对称性和传递性.

拟序关系与偏序关系的哈斯图在画法上完全相同，只是注意前者的各顶点处均无环. 这与关系表达式是一致的，而后者是省掉了各顶点处的环.

在例 2.15 中诸多的偏序关系中，可得到诸多的拟序关系.

A为实数集的非空子集，

$$\prec=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A\wedge x<y\},$$

$$>=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A\wedge x>y\}.$$

设 B 为 Z_+ 的子集，

$$'=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in B\wedge x\mid y\wedge x\neq y\}$$

等等都是拟序关系，相应的拟序集为 $\langle A,<\rangle$，$\langle A,>\rangle$，$\langle B,'\rangle$.

定理 2.30 设 $\prec$ 为非空集合 A 上的拟序关系，$\forall x,y\in A$，则

(1) $x\prec y$，$x=y$，$y\prec x$ 3 式中至多有一式成立；

(2) 若 $(x\prec y\vee x=y)\wedge(y\prec x\vee y=x)$，则 $x=y$.

证明 (1) 否则，至少有两式成立，即

$(x\prec y\wedge x=y)\vee(x\prec y\wedge y\prec x)\vee(x=y\wedge y\prec x)\vee(x\prec y\wedge x=y\wedge y\prec x)$ 为真，但此时会导出 $x\prec x$，这与 $\prec$ 反自反相矛盾.

(2) 若 $x\neq y$，则 $x=y$ 与 $y=x$ 为假，于是，由已知条件会得出 $x\prec y\wedge y\prec x$，这与(1)矛盾. ▌

定义 2.24 (1) 设 $\prec$ 为非空集合 A 上的拟序关系，若 $\forall x,y\in A$，$x\prec y$，$x=y$，$y\prec x$ 3 式中有且仅有一式成立，则称 $\prec$ 具有三歧性.

(2) 设 $\prec$ 为非空集合上的拟序关系，且 $\prec$ 满足三歧性，则称 $\prec$ 为 A 上的**拟线序关系**(或**拟全序关系**)，称 $\langle A,\prec\rangle$ 为**拟线序集**.

其实，$\prec$ 为 A 上的拟线序关系，即 $\forall x,y\in A$，若 $x\neq y$，则 $x\prec y$，$y\prec x$ 中成立且只成立一式，$\prec$ 的哈斯图也是"一条线".

定义 2.25 设 $\langle A,\preccurlyeq\rangle$ 为一个偏序集，$B\subseteq A$.

(1) 若存在 $y\in B$，使得 $\forall x(x\in B\rightarrow y\preccurlyeq x)$ 为真，则称 y 为 B 的**最小元**；

(2) 若存在 $y\in B$，使得 $\forall x(x\in B\rightarrow x\preccurlyeq y)$ 为真，则称 y 为 B 的**最大元**；

(3) 若存在 $y\in B$，使得 $\forall x(x\in B\wedge x\preccurlyeq y\rightarrow x=y)$ 为真，则称 y 为 B 的**极小元**；

(4) 若存在 $y\in B$，使得 $\forall x(x\in B\wedge y\preccurlyeq x\rightarrow x=y)$ 为真，则称 y 为 B 的**极大元**.

在例 2.16(1)中，取 $B_1=\{1,2,3\}$，$B_2=\{3,5,15\}$，$B_3=A$，则 1 是 B_1 是最小元，也是极小元，2、3 是 B_1 的极大元，但 B_1 无最大元. 3、5 是 B_2 的极小元，B_2 无最小元，15 是 B_2 的最大元，也是极大元. 1 是 $B_3=A$ 的最小元，又是极小元，4，6，9，15，10 是 B_3 的极大元，B_3 无最大元.

由定义不难看出，对于任意的 $\langle A,\preccurlyeq\rangle$，$B\subseteq A$，则 B 的最大（最小）元，一定是 B 的极大（极小）元. 若 B 的最大（最小）元存在，则一定是唯一的. 若 B 是有穷集，则 B 的极大（极小）元是一定存在的，并且可能有多个. 当然最大元和最小元仍然不一定存在.

定义 2.26 设 $\langle A,\preccurlyeq\rangle$ 为一个偏序集，$B\subseteq A$.

(1) 若存在 $y\in A$，使得 $\forall x(x\in B\to x\preccurlyeq y)$ 为真，则称 y 为 B 的**上界**.

设 $C=\{y\mid y$ 是 B 的上界$\}$，若 C 存在最小元，则称它为 B 的**最小上界**或**上确界**.

(2) 若存在 $y\in A$，使得 $\forall x(x\in B\to y\preccurlyeq x)$ 为真，则称 y 为 B 的**下界**.

设 $D=\{y\mid y$ 为 B 的下界$\}$，若 D 存在最大元，则称它为 B 的**最大下界**或**下确界**.

B 的上界和下界不一定存在，存在时，上确界和下确界也不一定存在.

定义 2.27 设 $\langle A,\preccurlyeq\rangle$ 为一个偏序集，$B\subseteq A$.

(1) 若对于 $\forall x,y\in B$，x 与 y 均可比，则称 B 为 A 中的一条**链**，B 中元素个数称为链的长度

(2) 若对于 $\forall x,y\in B$ 且 $x\neq y$，则 x 与 y 均不可比，则称 B 为 A 中一条**反链**，B 中元素个数称为反链的长度.

图 2.6 所示的图为某一偏序集 $\langle A,\preccurlyeq\rangle$ 的哈斯图，其中，$A=\{a,b,\cdots,k\}$.

$B_1=\{a,c,d,e\}$ 为一条长为 4 的链，

$B_2=\{a,e,h\}$ 为一条长为 3 的链，

$B_3=\{b,g\}$ 为一条长为 2 的链，

$B_4=\{g,h,k\}$ 为一条长为 3 的反链，

$B_5=\{a\}$ 既是长为 1 的链，又是一条长为 1 的反链，而 $B_6=\{a,b,g,h\}$ 既不是链，也不是反链.

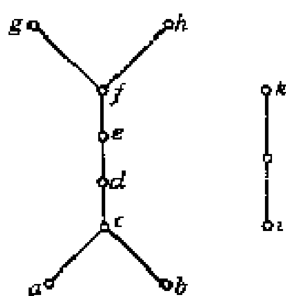


图 2.6

另外，B_1 的上界集合为 $\{e,f,g,h\}$，e 是上确界，下界集合为 $\{a\}$，a 也是下确界. B_4 既无上界，也无下界，当然也没有上确界和下确界.

定理 2.31 设 $<A,\preccurlyeq>$ 为一个偏序集，若 A 中最长链的长度为 n，则

(1) A 中存在极大元；

(2) A 存在 n 个划分块的划分，每个划分块都是反链.

证明 (1) 设 B 为 A 中一条最长链，则 $|B|=n$. 由 B 的性质可知，$\exists y\in B$，使得 $\forall x(x\in B\rightarrow x\preccurlyeq y)$ 为真，且 $\neg\exists z(z\in(A-B)\wedge y\prec z)$ 成立，否则均与 B 是链及最长链矛盾，于是 y 为 A 中极大元.

(2) 对 n 作归纳.

$n=1$ 时，A 本身为一反链，取 $\mathscr{A}=\{A\}$，则 $\mathscr{A}$ 为 A 的只含一个划分块且为反链的划分.

设 $n=k$ 时，结论成立. $n=k+1$ 时，取 M 为 A 中全体极大元集，由(1)可知 $M\neq\varnothing$，且 A 中每条最长链对应 A 的极大元均在 M 中，且 M 中各元素均不可比，于是 M 为一反链. $A-M$ 中最长链的长度为 k，由归纳假设知道 $A-M$ 存在每个划分块都是反链且有 k 个划分块的划分 $\mathscr{A}'$，则 $\mathscr{A}=\mathscr{A}'\cup\{M\}$ 为 A 的满足要求的划分. ▌

推论 设 $<A,\preccurlyeq>$ 为一个偏序集，若 A 中元素为 $mn+1$ 个，则 A 中存在长度为 $m+1$ 的反链，或存在长度为 $n+1$ 的链.

证明 用反证法. 若不然，A 中既无长度为 $m+1$ 的反链，也

无长度为 $n+1$ 的链，于是 A 中最长链的长度至多为 n，设最长链的长度为 $r(r<n)$，由定理 2.30 可知，A 中存在 r 个划分块的划分，且每个划分块至多有 m 个元素，于是 A 中至多有 mn 个元素，这与已知是矛盾的. ▌

在图 2.6 所示的偏序集中，最长链的长度为 6，如 $B_1=\{a,c,d,e,f,h\}$，$B_2=\{a,c,d,e,f,g\}$ 等都是 A 中最长的链. 由定理 2.30 可知，A 存在着 6 个划分块且每个划分块都是反链的划分，设 $\mathscr{A}=\{\{a,b,i\},\{g,h,k\},\{c,j\},\{d\},\{e\},\{f\}\}$，则 $\mathscr{A}$ 满足要求.

$|A|=11=2\times5+1$，在本例中，A 中既存在长度为 $2+1=3$ 的反链，也存在长度为 $5+1=6$ 的链.

在这里还应该指出，对于拟序集 $\langle A,\prec\rangle$，设 $B\subseteq A$，非常类似地定义 B 的最小（最大）元、极小（极大）元、上界（下界）、上确界（下确界），以及链和反链的概念，这里不再赘述. 定理 2.31 及其推论对拟序关系也是成立的.

还有一种重要的序关系，那就是良序关系，由于偏序与拟序关系可以相互转化，这里只对拟全序关系给出良序关系的定义.

定义 2.28 设 $\langle A,\prec\rangle$ 为一个拟全序集，若对于 A 的任何非空子集 B 均有最小元，则称 $\prec$ 为**良序关系**，$\langle A,\prec\rangle$ 为**良序集**.

设 $A\subseteq N$，则 $\langle A,<\rangle$ 为良序集，其中 $<$ 为小于关系，而 $\langle Z,<\rangle$，$\langle z,<\rangle$ 都不是良序集.

在这里应该指出，有的书上是对偏序关系给良序关系下定义的. 其实，两种定义法是可以相互转化的. 在学过函数及自然数的概念之后，对偏序集、拟序集，特别是良序集的性质将进一步进行讨论.

习　题　二

1. 按有序对的定义写出有序三元组 $\langle a,b,c\rangle$ 和有序对 $\langle\langle a,b\rangle,c\rangle$ 的集合表达式.

2. 计算下列各题(其结果用集合表示)

(1) $<a,b>\bigcup<c,d>$;

(2) $<a,b>\bigcap<c,d>$;

(3) $<a,b>\oplus<c,d>$;

(4) $\bigcap<a,b>$;

(5) $\bigcap<a,b>$;

(6) $\bigcap<a,b,c>$;

(7) $\bigcap\bigcap\{<a,b>\}$;

(8) $\bigcap\bigcap\bigcap\{<a,b>\}$.

3. $<a,<b,c>>=<a,b,c>$能成立吗?为什么?

4. 下列哪些等式是成立的?

(1) $<\varnothing,\varnothing>=\varnothing$;

(2) $<\varnothing,\varnothing>=\{\varnothing\}$;

(3) $<\varnothing,\varnothing>=\{\{\varnothing\}\}$;

(4) $<\varnothing,\varnothing>=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$;

(5) $<\varnothing,\varnothing>=\{\{\varnothing\},\{\varnothing,\varnothing\}\}$;

(6) $<a,a>=\{\{a\}\}$;

(7) $<a,a>=\{\{a\},\{a,a\}\}$.

5. 在什么条件下,下列等式成立?

(1) $A\times B=\varnothing$;

(2) $A\times B=B\times A$;

(3) $A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$.

6. 设A,B,C,D为任意的集合,证明下列各式成立.

(1) $(A\times C)\cup(B\times D)\subseteq(A\cup B)\times(C\cup D)$;

(2) $(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$;

7. 设A,B,C为任意集合,证明下列等式成立.

(1) $(A-B)\times C=(A\times C)-(B\times C)$;

(2) $(A\oplus B)\times C=(A\times C)\oplus(B\times C)$.

8. 设A,B为二集合,在什么条件下,有$A\times B\subseteq A$成立?等号能成立吗?

9. 设A是n元集,B是m元集,A到B共有多少个不同的二元关系?设$A=\{a,b,c\}$,$B=\{1\}$,写出A到B和B到A的全部二元关系.

10. 设R是非空集合A上的二元关系,证明 $\mathrm{fld}R=\bigcup\bigcup R$.

11. 设 $R_1=\{<a,b>,<b,d>,<c,c>,<c,d>\}$，$R_2=\{<a,c>,<b,d>,<d,b>,<d,d>\}$，$A=\{a,c\}$，求：

(1) $R_1\cup R_2$，$R_1\cap R_2$，$R_1\oplus R_2$；

(2) $\mathrm{dom}R_1$，$\mathrm{dom}R_2$，$\mathrm{dom}(R_1\cup R_2)$；

(3) $\mathrm{ran}R_1$，$\mathrm{ran}R_2$，$\mathrm{ran}R_1\cap \mathrm{ran}R_2$；

(4) $R_1\upharpoonright A$，$R_1\upharpoonright\{c\}$，$(R_1\cup R_2)\upharpoonright A$，$R_2\upharpoonright A$；

(5) $R_1[A]$，$R_2[A]$，$(R_1\cap R_2)[A]$；

(6) $R_1\circ R_2$，$R_2\circ R_1$，$R_1\circ R_1$.

12. 设 $R=\{<\varnothing,\{\varnothing,\{\varnothing\}\}>,<\{\varnothing\},\varnothing>,<\varnothing,\varnothing>\}$，求：

(1) R^{-1}；

(2) $R\circ R$；

(3) $R\upharpoonright\varnothing$，$R\upharpoonright\{\varnothing\}$，$R\upharpoonright\{\{\varnothing\}\}$，$R\upharpoonright\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$；

(4) $R[\varnothing]$，$R[\{\varnothing\}]$，$R[\{\{\varnothing\}\}]$，$R[\{\varnothing,\{\varnothing\}\}]$；

(5) $\mathrm{dom}R$，$\mathrm{ran}R$，$\mathrm{fld}R$.

13. 设 R 是非空集合 A 上的二元关系，证明：

(1) $R\cup R^{-1}$ 是包含 R 的最小的对称的二元关系；

(2) $R\cap R^{-1}$ 是含于 R 的最大的对称的二元关系.

14. 设 R 是非空集合 A 上的二元关系，若 $\forall x,y,z\in A$，如果 $xRy\wedge yRz$，则 $x\bar{R}z$，则称 R 是 A 上反传递的二元关系.

(1) 举一些反传递关系的例子；

(2) 证明：R 是反传递的当且仅当 $R^2\cap R=\varnothing$，其中，$R^2=R\circ R$.

15. 设 A 为一集合，$R,S,T\subseteq P(A)\times P(A)$，其中

$R=\{<x,y>\mid x,y\in P(A)\wedge x\subseteq y\}$，

$S=\{<x,y>\mid x,y\in P(A)\wedge x\cap y=\varnothing\}$，

$T=\{<x,y>\mid x,y\in P(A)\wedge x\cup y=A\}$.

试分析 R，S，T 的性质.

16. 设 $A=\{0,1,\cdots,12\}$，$R,S\subseteq A\times A$，其中，

$R=\{<x,y>\mid x,y\in A\wedge x+y=10\}$，

$S=\{<x,y>\mid x,y\in A\wedge x+3y=12\}$.

(1) 用列举法表示出 R 和 S；

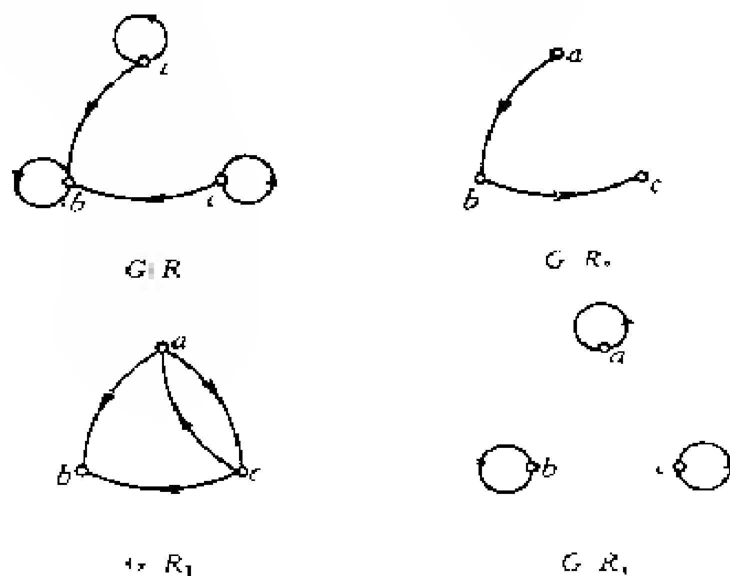
(2) 分析 R 和 S 的性质.

17. 设 $A=\{0,1,2,3\}$，$R\subseteq A\times A$，且

$$R = \{<x,y> \mid x = y \lor x + y \in A\},$$

求 R 的关系矩阵 $M(R)$ 和关系图 $G(R)$，并讨论 R 的性质。

18. 设 $A = \{a,b,c\}$，图 2.7 中给出了 4 个二元关系 R_1,R_2,R_3,R_4 的关系图，写出每个关系的集合表达式和关系矩阵，并讨论每个关系的性质。



$G(R_1)$　　$G(R_2)$

$G(R_3)$　　$G(R_4)$

图 2.7

19. 设 $A = \{a,b,c\}$，$R_1,R_2,R_3,R_4 \subseteq A \times A$，它们的关系矩阵分别为

$$M(R_1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M(R_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$M(R_3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M(R_4) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

写出各关系的集合表达式，画出关系图并讨论它们的性质。

20. 画出下列各二元关系的关系图，并写出关系矩阵。

(1) $A_1 = \{a,b,c,d\}$，$B_1 = \{1,2,3\}$，$R \subseteq A_1 \times B_1$，且 $R = \{<a,1>,<b,2>,<c,2>,<c,3>\}$.

(2) $A_2 = \{0,1,2\}$，$B_2 = \{0,2,4\}$，$R_2 \subseteq A_2 \times B_2$，且 $R = \{<x,y> \mid x \in A_2 \land y \in B_2 \land y \in A_2 \cap B_2\}$.

(3) $A_3 = \{1,2,3,4,5\}$，$B_3 = \{1,2,3\}$，$R \subseteq A_3 \times B_3$，且 $R_3 = \{<x,y> \mid x \in A_3 \land y \in B_3 \land 2 \le x + y \le 4\}$.

21. 设 $A_1=\{1,2\}$，$A_2=\{a,b,c\}$，$A_3=\{\alpha,\beta\}$，已知 $R_1\subseteq A_1\times A_2$，$R_2\subseteq A_2\times A_3$，且

$R_1=\{\langle 1,a\rangle,\langle 1,b\rangle,\langle 2,c\rangle\}$，

$R_2=\{\langle a,\beta\rangle,\langle b,\beta\rangle\}$，

用关系矩阵乘法求 $R_2\circ R_1$.

22. 设 R 是非空集合 A 上的二元关系，试证明，如果 R 是自反的，并且是传递的，则 $R\circ R=R$，但其逆不真.

23. 设 R,S 都是非空集合 A 上的二元关系，且它们都是对称的. 证明，$R\circ S$ 具有对称性当且仅当 $R\circ S=S\circ R$.

24. 设 $A=\{1,2\}$，写出 A 上的全部二元关系，讨论它们的性质并指出空关系、恒等关系、全域关系、小于等于关系、小于关系、大于等于关系、大于关系、整除关系等(以上各关系的定义请见 §2.2).

25. 设 $R\subseteq A\times B$，证明：

$I_{\mathrm{dom}R}\subseteq R^{-1}\circ R$，$I_{\mathrm{ran}R}\subseteq R\circ R^{-1}$.

26. 设 $A=\{a,b,c,d\}$，$R\subseteq A\times A$，且

$R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle\}$.

(1) 用 $M(R)$ 的幂求 R^2,R^3；

(2) 求最小的自然数 $m,n(m<n)$，使得 $R^m=R^n$；

(3) 由(2)你能得出哪些结论?

27. 设 R_1,R_2 是 $n(n\geq 2)$ 元集 A 上的二元关系，已知 $\mathrm{fld}R_1\cap\mathrm{fld}R_2=\varnothing$，证明：$(R_1\cup R_2)^m=R_1^m\cup R_2^m\ (m\geq 0)$.

28. 设 $A=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$，$R\subseteq A\times A$，且 $R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,a\rangle,\langle d,e\rangle,\langle e,f\rangle,\langle f,g\rangle,\langle g,h\rangle,\langle h,d\rangle\}$，求最小的自然数 $m,n(m<n)$，使得 $R^m=R^n$.

29. 设 $A=\{a,b,c,d\}$，$R\subseteq A\times A$，且 $R=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle\}$，求

(1) $r(R)$；

(2) $s(R)$；

(3) $t(R)$

并画出它们的关系图.

30. 设 R 是非空集合 A 上的二元关系，记传递闭包 $t(R)=R^+$，记 $\bigcup_{i=0}^{\infty}R^i$

R^*，证明：

(1) $(R^+)^+ = R^+$；

(2) $(R^*)^* = R^*$；

(3) $R \circ R^* = R^+ = R^* \circ R$.

31. R 是集合 $A=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ 上的二元关系，R 的关系图如图 2.8 所示，求 $r(R)$、$s(R)$、$t(R)$ 的关系图.

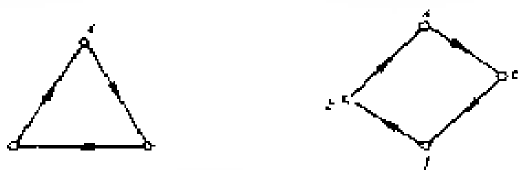


图 2.8

32. 设 $\mathscr{A}_n=\{A \mid A$ 为 n 阶实方阵$\}$，$n \geq 1$. 对于任意的 $A,B \in \mathscr{A}_n$，若存在非奇异的 $P,Q \in \mathscr{A}_n$，使得 $B = P \cdot A \cdot Q$，则称 A 等价于 B，记作 $A \cong B$.

若存在非奇异的 $P \in \mathscr{A}_n$，使得 $B = P \cdot A \cdot P^{-1}$，则称 A 相似于 B，记作 $A \sim B$.

若存在非奇异的 $P \in \mathscr{A}_n$，使得 $B = P \cdot A \cdot P^{T}$，则称 A 合同于 B，记作 $A \simeq B$.

证明 n 阶实矩阵之间的关系 $\cong$、$\sim$、$\simeq$ 都是等价关系.

33. 设 $C^* = \{a+bi \mid a,b$ 为实数且 $a \neq 0\}$，在 C^* 上定义：

$$R = \{\langle a+bi, c+di \rangle \mid a+bi, c+di \in C^* \wedge ac > 0\},$$

证明 R 是 C^* 上的等价关系，给出 R 产生的等价类，并说明其几何意义，式中 i 为虚数单位.

34. 设 R_1、R_2 是非空集合 A 上的等价关系，下面给出的关系是否还是 A 上的等价关系，为什么？

(1) $t(R_1 \cup R_2)$；

(2) $R_1 - (R_1 - R_2)$；

(3) $s(R_1 - R_2) \cup r(R_1 - R_2)$；

(4) $R_1 \circ R_2 \cup (R_1 \cap R_2)$.

35. 设 R 是非空集合 A 上的二元关系，R 满足下面条件：

(1) R 是自反的；

(2) $\forall x,y,z \in A$，若 $\langle x,y \rangle \in R \wedge \langle x,z \rangle \in R$，则 $\langle y,z \rangle \in R$

证明 R 是 A 上的等价关系.

36. 设 A,B 为二集合,已知 $A\cap B\neq\varnothing$,又已知 $\pi=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$ 为 A 的划分,设在 $A_i\cap B(i=1,2,\cdots,n)$中有 m 个是非空的($m\geq 1$ 是显然的),设 $B_{i_k}=A_{i_k}\cap B\neq\varnothing,k=1,2,\cdots,m$,证明 $\pi'=\{B_{i_1},B_{i_2},\cdots,B_{i_m}\}$ 为 $A\cap B$ 的划分.

37. 设 $A=\{1,2,\cdots,20\}$,$R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A\wedge x\equiv y(\mathrm{mod}\ 5)\}$,证明 R 为 A 上的等价关系,求 A/R 诱导出的 A 的划分.

38. 设 $\pi_1=\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$,$\pi_2=\{B_1,B_2,\cdots,B_n\}$都是集合 A 的划分,证明

$$\mathscr{A}=\{A_i\cap B_j \mid i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n\}$$

也是 A 的划分,并且 $\mathscr{A}$ 既是 π_1 的加细,又是 π_2 的加细.

39. 设 $A=\{1,2,3,4,5\}$,$\pi=\{\{1,2,3\},\{4,5\}\}$ 是 A 的一个划分.

(1) 求 π 诱导出的 A 上的等价关系 R_π 及商集 A/R_π;

(2) 求 π 的所有加细诱导出的 A 上的等价关系及其商集.

40. 设 R_1,R_2 都是非空集合 A 上的等价关系,证明:A/R_1 是 A/R_2 的加细当且仅当 $R_1\subseteq R_2$.

41. 设 R_1 是 A 上的等价关系,R_2 是 B 上的等价关系,A,B 均非空.
$R_3=\{\langle\langle x_1,y_1\rangle,\langle x_2,y_2\rangle\rangle \mid x_1R_1x_2\wedge y_1R_2y_2\}$,证明 R_3 是 $A\times B$ 上的等价关系.

42. 设 $A=\{a,b,c,d\}$,已知 A 共有 15 个不同的等价关系.在这 15 个等价关系中,商集为二元集的有几个?试写出它们的集合表达式.

43. 设 $A=\{a,b,c,d,e\}$.试用第二类 Stirling 数及其性质计算 A 上有多少个不同的划分(从而可知 A 中有多少个不同的等价关系).

44. 设 $A=\{1,2,3,4\}$,R_1,R_2,R_3 是 A 上的偏序关系,它们的关系图如图 2.9 所示.

(1) 画出 R_1,R_2,R_3,R_4 的哈斯图;

(2) 指出哪些是全序关系.

45. 分别画出下列各偏序集的哈斯图,并指出 A 的最大元、最小元、极大元、极小元.

(1) 偏序集为$\langle A,\preccurlyeq\rangle$,其中,$A=\{a,b,c,d,e\}$,$\preccurlyeq=I_A\cup\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle a,d\rangle,\langle a,e\rangle,\langle b,e\rangle,\langle c,e\rangle,\langle d,e\rangle\}$.

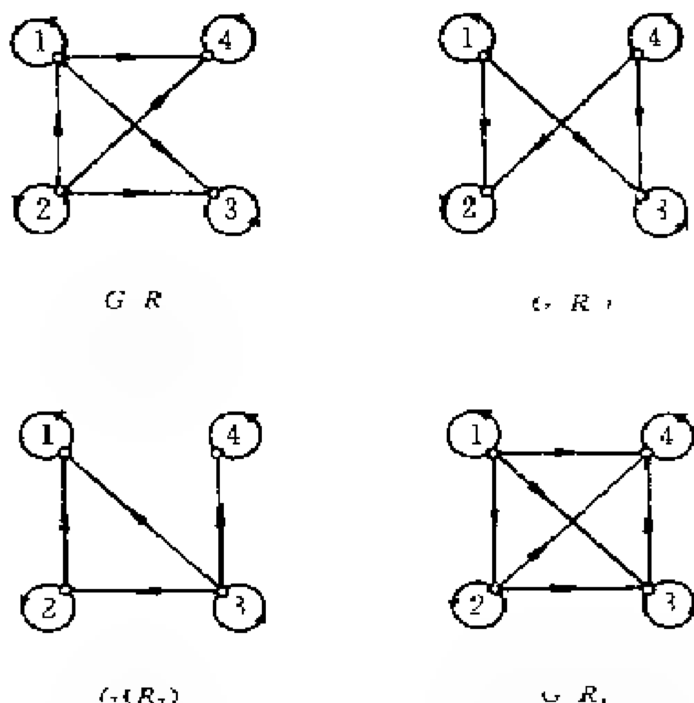


图 2.9

(2) 偏序集为$<A_2, \leqslant_2>$，其中，$A_2=A_1$，$\leqslant_2=I_{A_2}\cup\{<c,d>,<b,d>\}$.

46. 在偏序集$<Z^+, \leqslant>$中，Z^+为正整数集合，$\leqslant$为整除关系，设$B=\{1,2,\cdots,10\}$，求B的上界、上确界、下界、下确界.

47. 设偏序集为$<A, \leqslant>$，其中A是54的因子的集合，$\leqslant$为整除关系，画出哈斯图，指出A中有多少条最长链，并指出A中元素至少可以划分成多少个互不相交的反链，又至多可以划分成多少个互不相交的反链.

48. 设R是非空集A上的二元关系，$B\subset A$，在B上定义二元关系如下$R\upharpoonright B=R\cap(B\times B)$，证明：

(1) 若R是A上的拟序关系，则$R\upharpoonright B$是B上的拟序关系；

(2) 若R是A上的偏序关系，则$R\upharpoonright B$是B上的偏序关系；

(3) 若R是A上的全序关系，则$R\upharpoonright B$是B上的全序关系；

(4) 若R是A上的良序关系，则$R\upharpoonright B$是B上的良序关系；

49. 设R_1是A上的拟序关系，R_2是B上的拟序关系，在$A\times B$上定义二元关系如下：

$<<x_1,y_1>,<x_2,y_2>>\in R$

$\Leftrightarrow <y_1,y_2>\in R_2 \vee (<x_1,x_2>\in R_1 \wedge y_1=y_2)$，证明 R 是 $A\times B$ 上的拟序关系.

50. 设 R_1 是 A 上的偏序关系，R_2 是 B 上的偏序关系，定义 $A\times B$ 上的二元关系 R 如下：

$<<x_1,y_1>,<x_2,y_2>>\in R$

$\Leftrightarrow <x_1,x_2>\in R_1 \wedge <y_1,y_2>\in R_2$，证明 R 是 $A\times B$ 上的偏序关系

51. 设 R_1 是 $A=\{1,2,4,8\}$ 上的整除关系，R_2 是 $B=\{1,2,3,6\}$ 上的整除关系，按第 49 题所定义的，R 是 $A\times B$ 上的偏序关系，试画出 R_1，R_2，R 的哈斯图.

52. 设 A 是 3 元集，问 A 上共有多少个偏序关系？

53. 设 A 是非空集合，$X=\{x \mid x$ 是 A 的划分$\}$，定义 X 上的二元关系如下：

$R=\{<x,y> \mid x\in X\wedge y\in X\wedge x$ 是 y 的加细$\}$，证明 R 是 X 上的偏序关系.

第三章 函 数

函数(又称为映射)是数学中最基本又是最重要的概念之一，读者在中学和大学的数学课程的学习中都学过函数的定义、性质以及函数的微分和积分等概念及这些概念的应用. 在集合论中，将函数作为特殊的二元关系进行研究，主要研究离散结构之间的函数关系，以及与计算机科学有关的函数的类型、性质和相关的概念，以期达到应用的目的. 函数也是集合论中基数、序数以及抽象代数等课程不可缺少的概念，因而它是离散数学中极其重要的概念之一.

§3.1 函数的基本概念

函数作为特殊的二元关系是如下定义的.

定义 3.1 设 F 为一个二元关系，若 F 是单值的，则称 F 是**函数**或**映射**，即

F 是函数 $\Longleftrightarrow F$ 是二元关系 $\wedge \forall x \forall y \forall z(x \in \mathrm{dom}F \wedge y \in \mathrm{ran}F \wedge z \in \mathrm{ran}F \wedge xFy \wedge xFz \to y=z.)$

由定义可知，$\varnothing$ 是函数，称其为空函数.

常用 $F, G, H, \cdots, f, g, h \cdots$ 表示函数. 设 F 为一函数，若 $<x,y> \in F(xFy)$，由 F 的单值性，还可以记为 $F(x)=y$，于是

$$<x,y> \in F \Longleftrightarrow xFy \Longleftrightarrow F(x)=y.$$

若 F 不是函数，则最后一种表示法是无效的.

由于函数是二元关系，所以关于二元关系的许多概念及其运算对函数也是适用的.

定义 3.2 设 A, B 为二集合，F 为一函数，若 $\mathrm{dom}\subseteq A$，且 ran

$F \subseteq B$，则称 F 是 A 到 B 的**偏函数**，记作 $F: A \mapsto B$. 称 A 为 F 的**前域**，记 A 到 B 的全体偏函数为 $A \mapsto B$，即

$$A \mapsto B = \{F \mid F: A \mapsto B\}.$$

由定义可知，$A \mapsto B \subseteq P(A \times B)$.

【例 3.1】 设 $A=\{a,b\}$，$B=\{1,2\}$，试求 $A \mapsto B$.

解 本例要求从 $A \times B$ 的全体子集，即 $P(A \times B)$ 中找出全体函数，它们都是 A 到 B 的偏函数.

$A \times B$ 的零元子集 $\varnothing$ 为函数，记为 f_0.

$A \times B$ 的 4 个 1 元子集全为函数，记 $f_1=\{<a,1>\}$，$f_2=\{<a,2>\}$，$f_3=\{<b,1>\}$，$f_4=\{<b,2>\}$.

$A \times B$ 的 6 个 2 元子集中只有 4 个是函数，记 $f_5=\{<a,1>,<b,1>\}$，$f_6=\{<a,1>,<b,2>\}$，$f_7=\{<a,2>,<b,1>\}$，$f_8=\{<a,2>,<b,2>\}$.

显然 $A \times B$ 的 4 个 3 元子集和 1 个 4 元子集全不是函数. 于是 A 到 B 的全体偏函数共有 9 个，即

$$A \mapsto B = \{f_0, f_1, \cdots, f_8\}.$$

定义 3.3 设 F 是 A 到 B 的偏函数，且 $\mathrm{dom}F = A$，则称 F 为 A 到 B 的**全函数**，简称 A 到 B 的**函数**，记作 $F: A \to B$，记 A 到 B 的全体全函数为 B^A 或 $A \to B$，即

$$B^A = A \to B = \{F \mid F: A \to B\}.$$

由定义不难看出，若 $F: A \to B$，则 $F: A \mapsto B$，但反之不真.

在例 3.1 中，

$$B^A = A \to B = \{f_5, f_6, f_7, f_8\}.$$

设 A, B 均为有穷集合，设 $|A|=n$，$|B|=m$，且 $n \geq 1, m \geq 1$，则 $|B^A| = m^n$，即 A 到 B 共有 m^n 个函数（全函数）. 当 $A=\varnothing$ 时，B^A 中只有空函数，即 $B^A=\{\varnothing\}$. 当 $A \neq \varnothing$ 而 $B=\varnothing$ 时，由全函数的定义可知，$B^A=\varnothing$，即此时，A 到 B 无全函数，但此时，$\varnothing$ 为 A 到 B 的唯一的偏函数.

定义 3.4 设 F 为 A 到 B 的偏函数，即 $F: A \mapsto B$，且 $\mathrm{dom}F$

$\subset A$，则称 F 为 A 到 B 的**真偏函数**，记作 $F:A \mathrel{\mid\!\!\!\nrightarrow} B$，记 A 到 B 的全体真偏函数为 $A \mathrel{\mid\!\!\!\nrightarrow} B$，即

$$A \mathrel{\mid\!\!\!\nrightarrow} B = \{F \mid F:A \mathrel{\mid\!\!\!\nrightarrow} B\}.$$

显然有

$$A \mathrel{\mid\!\!\!\nrightarrow} B \subseteq A \nrightarrow B \text{ 且 } A \to B \subseteq A \nrightarrow B.$$

并且，

$$A \nrightarrow B = (A \mathrel{\mid\!\!\!\nrightarrow} B) \cup (A \to B).$$

在例 3.1 中，$A \mathrel{\mid\!\!\!\nrightarrow} B = \{f_0, f_1, f_2, f_3, f_4\}$.

从以上的讨论可知，若 F 是 A 到 B 的真偏函数，则 F 是 $\mathrm{dom}F$ 到 B 的函数（全函数），即若 $F \in (A \mathrel{\mid\!\!\!\nrightarrow} B)$，则 $F \in (\mathrm{dom}F \to B)$.

又设 F 是定义 3.1 意义下的一个函数，则 $F \in (A \nrightarrow B)$，其中 $\mathrm{dom}F = A$，$\mathrm{ran}F \subseteq B$，特别地，$F \in (\mathrm{dom}F \to B)$，即 F 是它的定义域到 $B(\mathrm{ran}F \subseteq B)$ 的函数（全函数）.

由以上的分析可知，若讨论函数的性质，只要讨论 A 到 B 的函数（全函数）的性质就够了，下节专门讨论 A 到 B 的函数的性质.

§3.2 函数的性质

本节中所讨论的 A 到 B 的函数，均指 A 到 B 的全函数.

定义 3.5 设 $f:A \to B$.

(1) 若 $\mathrm{ran}f = B$，则称 f 是**满射的**；

(2) 若 f 是单根的，则称 f 是**单射的**；

(3) 若 f 既是满射的，又是单射的，则称 f 是**双射的**.

【例 3.2】 设 $A_1 = \{a,b\}$，$B_1 = \{1,2,3\}$，

$$A_2 = \{a,b,c\},\ B_2 = \{1,2\},$$

$$A_3 = \{a,b,c\},\ B_3 = \{1,2,3\}.$$

分别写出 $A_1 \to B_1$，$A_2 \to B_2$，$A_3 \to B_3$ 中的满射、单射和双射函数.

解 $A_1 \to B_1$ 中无满射和双射函数，其单射函数共有 6 个，分别记为：

$f_1=\{<a,1>,<b,2>\}$，$f_2=\{<a,1>,<b,3>\}$，

$f_3=\{<a,2>,<b,1>\}$，$f_4=\{<a,2>,<b,3>\}$，

$f_5=\{<a,3>,<b,1>\}$，$f_6=\{<a,3>,<b,2>\}$。

$A_2 \to B_2$ 中无单射和双射函数，其满射函数共有 6 个，分别记为：

$g_1=\{<a,1>,<b,1>,<c,2>\}$，

$g_2=\{<a,1>,<b,2>,<c,1>\}$，

$g_3=\{<a,2>,<b,1>,<c,1>\}$，

$g_4=\{<a,1>,<b,2>,<c,2>\}$，

$g_5=\{<a,2>,<b,1>,<c,2>\}$，

$g_6=\{<a,2>,<b,2>,<c,1>\}$。

$A_3 \to B_3$ 中共有 6 个既单射，又满射的函数，即双射函数，分别记为：

$h_1=\{<a,1>,<b,2>,<c,3>\}$，

$h_2=\{<a,1>,<b,3>,<c,2>\}$，

$h_3=\{<a,2>,<b,1>,<c,3>\}$，

$h_4=\{<a,2>,<b,3>,<c,1>\}$，

$h_5=\{<a,3>,<b,1>,<c,2>\}$，

$h_6=\{<a,3>,<b,2>,<c,1>\}$。

设 $|A|=n$，$|B|=m$，从例 3.2 可以看出：

(1) 当 $n<m$ 时，$A\to B$ 中不含满射函数，从而不含双射函数，而当 $n\leq m$ 时，$A\to B$ 中共含

$$m(m-1)\cdots(m-n+1)$$

个不同的单射函数.

(2) 当 $m=n$ 时，$A\to B$ 中含 $n!$ 个双射函数.

(3) $m<n$ 时，$A\to B$ 中不含单射函数，从而不含双射函数.

要问，当 $m\le n$ 时，$A\to B$ 中共含多少个满射函数呢？

这个问题相当于将 n 个不同的球放入 m 个不同的盒中去（$n\ge m$），且不允许有空盒的放球方案数. 由组合数学的知识可知，方案数为

$$m!\left\{ n \atop m \right\}.$$

其中 $\left\{ n \atop m \right\}$ 为第二类 Stirling 数，它的定义及性质请见§2.7（等价关系和划分）.

在例 3.2 中，$|A_2|=3$，$|B_2|=2$，$A_2\to B_2$ 中的满射函数数为 $2!\left\{ 3 \atop 2 \right\}=2\cdot C_3^2=6$，这与我们计算出的结果是相同的.

设 $|A|=5$，$|B|=3$，则 $A\to B$ 中含 $3!\left\{ 5 \atop 3 \right\}$ 个满射函数. 而

$$\begin{aligned}3!\left\{ 5 \atop 3 \right\}&=3!\left(3\left\{ 4 \atop 3 \right\}+\left\{ 4 \atop 2 \right\}\right)\\&=6(3\cdot C_4^2+2^3-1)\\&=6(18+7)=150.\end{aligned}$$

即 $A\to B$ 中含 150 个满射函数.

【例 3.3】 讨论下列各函数的性质（所出现集合 A,B 均为有穷集合，且 $A\ne\varnothing$，$B\ne\varnothing$）.

(1) $f:A\to B$，$g:A\to A\times B$，且 $\forall a\in A$，$g(a)=\langle a,f(a)\rangle$，讨论 g 的性质.

(2) $f:A\times B\to A$，且 $\forall\langle a,b\rangle\in A\times B$，$f(\langle a,b\rangle)=a$；

(3) $f:A\times B\to B\times A$，且 $\forall\langle a,b\rangle\in A\times B$，$f(\langle a,b\rangle)=\langle b,a\rangle$.

解 (1) 当 B 不是单元集时，g 为单射的，但不是满射的，从而不是双射的. 当 B 为单元集时，g 是双射的.

(2) 当 B 不是单元集时，f 是满射的，但不是单射的. 当 B 是

单元集时，f 是双射的.

(3) f 是单射的，又是满射的，因而是双射的.

在第二章中，已经给出了集合的限制与象的概念，这些概念当然也适合于函数. 下面的定义对 A 到 B 的函数的象给出一些特殊的记法与名称.

定义 3.6 设 $f:A\to B$，$A'\subseteq A$，记 A' 在 f 下的象 $f[A']$ 为 $f(A')$，即 $f(A')=\{y\mid y=f(x)\wedge x\in A'\}$，将 $f(A')$ 仍称为 A' 在 f 下的象. 特别地，称 $f(A)$ 为函数 f 的象. 设 $B'\subseteq B$，称 $f^{-1}(B')=\{x\mid x\in A\wedge f(x)\in B'\}$ 为 B' 的**完全原象**，简称为 B' 的**原象**.

由定义不难看出，若 $f:A\to B$，则 $f(A)=\mathrm{ran}\,f$，$f^{-1}(B)=A$.

例如，设 $f:R\to R$，R 为实数集，且 $f(x)=x^2$，取 $A_1=[0,+\infty)$，$A_2=[1,3)$，$A_3=R$，则 $f(A_1)=[0,+\infty)$，$f(A_2)=[1,9)$，$f(A_3)=[0,+\infty)$.

取 $B_1=(1,4)$，$B_2=[0,1]$，$B_3=R$，则 $f^{-1}(B_1)=(-2,-1)\cup(1,2)$，$f^{-1}(B_2)=[-1,1]$，$f^{-1}(B_3)=R$.

定理 3.1 设 $f:C\to D$，且 f 为单射的，$\mathscr{A}$ 为 C 的非空的子集族，$C_1,C_2\subseteq C$，则

(1) $f(\bigcup\mathscr{A})=\bigcup\{f(A)\mid A\in\mathscr{A}\}$；

(2) $f(\bigcap\mathscr{A})=\bigcap\{f(A)\mid A\in\mathscr{A}\}$；

(3) $f(C_1-C_2)=f(C_1)-f(C_2)$.

本定理由定理 2.9 及 f 的单射性所证.

定理 3.2 设 $f:C\to D$，$D_1,D_2\subseteq D$，$\mathscr{D}$ 是 D 的非空子集族，则

(1) $f^{-1}(\bigcup\mathscr{D})=\bigcup\{f^{-1}(D)\mid D\in\mathscr{D}\}$；

(2) $f^{-1}(\bigcap\mathscr{D})=\bigcap\{f^{-1}(D)\mid D\in\mathscr{D}\}$；

(3) $f^{-1}(D_1-D_2)=f^{-1}(D_1)-f^{-1}(D_2)$.

由于函数的逆总是单根的，由定理 2.9 可证本定理.

下面给出几个特殊函数的定义.

定义 3.7 (1) 设 $f:A\to B$，如果存在 $b\in B$，使得对所有 $x\in A$，均有 $f(x)=b$，则称 f 是 A 到 B 的**常数函数**.

(2) 设 $f:A\to A$，对于任意的 $x\in A$，$f(x)=x$，则称 f 为 A 上的**恒等函数**. 其实，f 是 A 上的恒等关系，因而将 A 上的恒等函数依然记为 I_A.

(3) 设 $f:A\to\{0,1\}$，$A'\subseteq A$，若

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in A',\\ 0, & x\in A-A',\end{cases}$$

则称 f 为 A 上关于 A' 的**特征函数**. 常将 A' 的特征函数记为 $\chi_{A'}$.

设 $A=\{a,b,c,d\}$，$A'=\{a,d\}$，$\chi_{A'}:A\to\{0,1\}$，则 $\chi_{A'}(a)=\chi_{A'}(d)=1$，而 $\chi_{A'}(b)=\chi_{A'}(c)=0$.

定义 3.8 设 A、B 为二集合，$\preccurlyeq_1$，$\preccurlyeq_2$ 分别为 A、B 上的全序关系，$f:A\to B$. 若对于任意的 $x_1,x_2\in A$，如果 $x_1\prec_1 x_2$，则 $f(x_1)\preccurlyeq_2 f(x_2)$，则称 f 是**单调递增的**. 如果 $x_1\prec_1 x_2$，则 $f(x_1)\prec_2 f(x_2)$，则称 f 是**严格单调递增的**. 如果 $x_1\prec_1 x_2$，则 $f(x_1)\succcurlyeq_2 f(x_2)$，则称 f 是**单调递减的**. 如果 $x_1\prec_1 x_2$，则 $f(x_1)\succ_2 f(x_2)$，则称 f 是**严格单调递减的**.

例如，在 R 上取“$\leqslant$”关系，设 $f:R\to R$，且 $f(x)=e^x$，$g:R\to R$，且 $g(x)=e^{-x}$，则 f 是 R 上严格单调递增函数，而 g 是严格单调递减函数.

定义 3.9 设 R 是 A 上的等价关系，A/R 是 A 关于 R 的商集，设 $f:A\to A/R$，且 $f(a)=[a]$，则称 f 为 A 到 A/R 的**自然映射**或**典型映射**.

设 $A=\{a,b,c,d\}$，$R=I_A\cup\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle\}$，则 R 为 A 上的等价关系. $f:A\to A/R$，则

$$f(a)=[a]=\{a,b\},\ f(b)=[b]=\{a,b\},$$
$$f(c)=[c]=\{c\},\ f(d)=[d]=\{d\}.$$

一般说来，自然映射函数均为满射的，但当等价关系 R 不是恒等关系时，自然映射均不是单射的. 严格单调函数（严格单调递增或严格单调递减的函数统称为严格单调函数），是单射的. 当 $A'\subset A$ 时，特征函数 $\chi_{A'}$ 为满射的.

§3.3 函数的合成

在第二章,曾讲过二元关系合成运算的规律,那些规律对函数也是适用的. 本章讨论集合之间的函数(全函数)的合成的规律性.

定理 3.3 设 $g:A\to B$, $f:B\to C$, 则 $f\circ g:A\to C$, 且对于任意的 $x\in A$, $f\circ g(x)=f(g(x))$.

证明 $f\circ g$ 为 A 到 C 的二元关系是显然的. 下面只需证明 $\mathrm{dom}(f\circ g)=A$, 且 $f\circ g$ 是单值的以及 $f\circ g(x)=f(g(x))$.

(1) 首先证明 $f\circ g$ 是函数.

任给 $x\in \mathrm{dom} f\circ g$, 若存在 $z_1,z_2\in \mathrm{ran}(f\circ g)$, 则

$$x(f\circ g)z_1\wedge x(f\circ g)z_2$$

$\Longleftrightarrow \exists y_1(y_1\in B\wedge xgy_1\wedge y_1fz_1)\wedge \exists y_2(y_2\in B\wedge xgy_2\wedge y_2fz_2)$

$\Longleftrightarrow \exists y_1\exists y_2(y_1\in B\wedge y_2\in B\wedge xgy_1\wedge xgy_2\wedge y_1fz_1\wedge y_2fz_2)$

$\Rightarrow \exists y(y\in B\wedge y_1=y_2=y\wedge yfz_1\wedge yfz_2)$ (因为 g 是函数)

$\Rightarrow z_1=z_2$. (因为 f 是函数)

综上所述, $f\circ g$ 是单值的, 即它是函数.

(2) 证明 $\mathrm{dom}(f\circ g)=A$.

$\mathrm{dom}(f\circ g)\subseteq A$ 是显然的, 只需证 $A\subseteq \mathrm{dom}(f\circ g)$. 对于任意的 x,

$x\in A$

$\Rightarrow \exists!$[1] $y(y\in B\wedge xgy)$ (因为 $g:A\to B$)

$\Rightarrow \exists!y\exists!z(y\in B\wedge z\in C\wedge xgy\wedge yfz)$ (因为 $f:B\to C$)

$\Rightarrow \exists!y\exists!z(y\in B\wedge z\in C\wedge x(f\circ g)z)$

$\Rightarrow x\in \mathrm{dom}(f\circ g)$.

所以 $A\subseteq \mathrm{dom}(f\circ g)$, 于是 $\mathrm{dom}(f\circ g)=A$.

由(1),(2)可知, $f\circ g:A\to C$. 于是, 对于任意 x,

---

[1] $\exists!x$ 表存在唯一的 x, 即 $\exists!$ 为存在唯一量词.

$$x\in A$$
$$\Rightarrow \exists ! z(z\in C\land z=f\circ g(x))$$
$$\Longleftrightarrow \exists ! z\exists ! y(z\in C\land y\in B\land y=g(x)\land z=f(y))$$
$$\Longleftrightarrow \exists ! z\exists ! y(z\in C\land y\in B\land z=f(g(x))).$$

所以，任意$x\in A$，有$f\circ g(x)=f(g(x))$. ▌

定理 3.4 设$g:A\to B$，$f:B\to C$.

(1) 如果f和g都是满射的，则$f\circ g$是满射的；

(2) 如果f和g都是单射的，则$f\circ g$是单射的；

(3) 如果f和g都是双射的，则$f\circ g$是双射的.

证明 由定理3.3可知，$f\circ g\in(A\to C)$，于是在下面的证明中，只需证明$f\circ g$是满射的，单射的和双射的.

(1) 对于任意的z，
$$z\in C$$
$$\Rightarrow \exists y(y\in B\land z=f(y))$$
$$\Rightarrow \exists y\exists x(y\in B\land x\in A\land z=f(y)\land y=g(x))$$
$$\Rightarrow \exists y\exists x(y\in B\land x\in A\land z=f(g(x))=f\circ g(x))$$
$$\Rightarrow \exists x(x\in A\land z=f\circ g(x)).$$

所以，$f\circ g$是满射的.

(2) 若存在$z\in C$，存在$x_1,x_2\in A$，使得
$$x_1(f\circ g)z\land x_2(f\circ g)z$$
$$\Rightarrow \exists y_1\exists y_2(y_1\in B\land y_2\in B\land y_1fz\land x_1gy_1\land y_2fz\land x_2gy_2)$$
$$\Rightarrow y_1=y_2\land x_1=x_2 \quad \text{(因为 } f,g \text{ 均为单射的)}$$
$$\Rightarrow x_1=x_2.$$

所以，$f\circ g$是单射的.

由(1)，(2)的证明保证(3)的正确性. ▌

注意，定理3.4的逆不真，但下面定理成立.

定理 3.5 设$g:A\to B$，$f:B\to C$.

(1) 如果$f\circ g$是满射的，则f是满射的；

(2) 如果$f\circ g$是单射的，则g是单射的；

(3) 如果 $f\circ g$ 是双射的，则 g 是单射的，f 是满射的.

证明 (1) 对于任意的 z，

$$z\in C$$

$\Rightarrow\exists x(x\in A\wedge x(f\circ g)z)$ （因为 $f\circ g$ 是满射的）

$\Rightarrow\exists x\exists y(x\in A\wedge y\in \mathrm{ran}g\subseteq B\wedge xgy\wedge yfz)$

$\Rightarrow\exists x\exists y(x\in A\wedge y\in B\wedge y=g(x)\wedge z=f(y))$

$\Rightarrow\exists y(y\in B\wedge z=f(y))$.

所以，f 是满射的.

(2) 若存在 $y\in \mathrm{ran}g\subseteq B$，又存在 $x_1,x_2\in A$，使得，

$$x_1gy\wedge x_2gy$$

$\Rightarrow\exists z(z\in \mathrm{ran}f\subseteq C\wedge yfz\wedge x_1gy\wedge x_2gy)$

$\Rightarrow\exists z(z\in C\wedge x_1(f\circ g)y\wedge x_2(f\circ g)y)$

$\Rightarrow x_1=x_2$ （因为 $f\circ g$ 是单射的）.

由(1)，(2)可知(3)成立. ▌

定理 3.6 设 $f:A\to B$，则

$$f=f\circ I_A=I_B\circ f,$$

其中 I_A，I_B 分别为 A 上和 B 上的恒等函数.

证明 $I_A:A\to A$，且任意 $x\in A$，$I_A(x)=x$，而 $I_B:B\to B$，对于任意的 $y\in B$，$I_B(y)=y$，由定理 3.3 可知，$f\circ I_A\in(A\to B)$，$I_B\circ f\in(A\to B)$. 下面证明 $f=$ [illegible] I [illegible].

对于任意的 $\langle x,y\rangle$，

$\langle x,$ [illegible] $\in f$ [illegible]

$\Rightarrow x\in A\wedge x$ [illegible] （因为 $f:A\to A$）

$\Rightarrow xI_A$ [illegible] $\wedge$ [illegible]

$\Longleftrightarrow$ [illegible] x,y [illegible]

所以，f [illegible]

反之 [illegible] 任意 [illegible] x,y [illegible]

x,y [illegible] $\in f$ [illegible] I [illegible]

$\Rightarrow xI_A$ [illegible] $\wedge$ [illegible] $\Longleftrightarrow\langle x,y\rangle\in f$.

所以，$f\circ I_A\subseteq f$，于是 $f=f\circ I_A$，类似可证明 $f=I_B\circ f$，因而 $f=f\circ I_A=I_B\circ f$. ▌

定理 3.7 设 $f:R\to R$，$g:R\to R$，已知 f 和 g 按实数集上的“$\le$”关系都是单调增加的，则 $f\circ g$ 也是单调增加的.

证明 由定理 3.3 知，$f\circ g\in(R\to R)$，对于任意的 $x,y\in R$，

$x\le y\Rightarrow g(x)\le g(y)$（因为 g 是单调增加的）

$\Rightarrow f(g(x))\le f(g(y))$（因为 f 是单调增加的）

$\Leftrightarrow f\circ g(x)\le f\circ g(y)$.

所以，$f\circ g$ 是单调增加的. ▌

§3.4 反 函 数

任给一个集合 A，A 中可能有有序对作为元素，也可能没有，但无论有无有序对作为元素，A 的逆 A^{-1} 一定是二元关系（当然可能是空关系）. 在什么情况下 A^{-1} 是函数呢？见下面定理.

定理 3.8 设 A 为一个集合，A^{-1} 为函数当且仅当 A 为单根的.

证明 必要性. 若存在 $y\in \text{ran}A$，存在 $x_1,x_2\in \text{dom}A$，使得

$$\langle x_1,y\rangle\in A\wedge\langle x_2,y\rangle\in A$$

$\Leftrightarrow\langle y,x_1\rangle\in A^{-1}\wedge\langle y,x_2\rangle\in A^{-1}$

$\Rightarrow x_1=x_2$. （因为 A^{-1} 为函数）

所以，A 是单根的.

类似可证充分性. ▌

推论 设 R 为二元关系，R 为函数当且仅当 R^{-1} 是单根的.

证明 R^{-1} 作为集合，由定理 3.8 可知，$(R^{-1})^{-1}$ 是函数当且仅当 R^{-1} 是单根的，但因 R 为关系，由定理 2.1 可知，$(R^{-1})^{-1}=R$，所以推论为真. ▌

设 $f\in(A\to B)$，下面讨论 $f^{-1}\in(B\to A)$ 的条件，首先看下例.

【例 3.4】 设 $f_1,f_2,f_3\in(N\to N)$，且对于任意 $n\in N$，

$f_1(n) = 2n$;

$$f_2(n) = \begin{cases} 0, & n = 0 \text{ 或 } n = 1, \\ n-1, & n \geq 2; \end{cases}$$

$$f_3(n) = \begin{cases} n-1, & n \text{ 为奇数}, \\ n+1, & n \text{ 为偶数}. \end{cases}$$

试分析，f_1^{-1}，f_2^{-1}，f_3^{-1} 中哪些属于$(N \nrightarrow N)$，哪些属于$(N \to N)$。

解 (1) f_1 是单射的，但非满射，因而 f_1^{-1} 是单值的，所以 f_1^{-1} 是函数. $\mathrm{dom} f_1^{-1} = \mathrm{ran} f_1 = N_{偶}$，其中 $N_{偶} = \{n \mid n \in N \wedge n \text{ 为偶数}\}$，所以 $f_1^{-1} \in (N_{偶} \to N)$，即 f_1^{-1} 是 $N_{偶}$ 到 N 的函数（全函数）。显然 $f_1^{-1} \in (N \nrightarrow N)$，即 f_1^{-1} 是 N 到 N 的偏函数，而且是真偏函数. 因而 $f_1^{-1} \notin (N \to N)$。

(2) f_2 是满射的，但非单射，因而 f_2^{-1} 不是单值的，($\langle 0, 0 \rangle \in f_2^{-1} \wedge \langle 0, 1 \rangle \in f_2^{-1}$)，所以 f_2^{-1} 不是函数，因而 $f_2^{-1} \notin (N \nrightarrow N)$，更 $\notin (N \to N)$。

(3) f_3 是单射的，也是满射的，因而是双射的，所以 f_3^{-1} 是单值的，因而它是函数，且 $f_3^{-1} \in (N \to N)$，而且对于任意的 $n \in N$，

$$f_3^{-1}(n) = \begin{cases} n+1, & n \text{ 为偶数}, \\ n-1, & n \text{ 为奇数}, \end{cases}$$

其实，$f_3^{-1} = f_3$。

定理 3.9 设 $f: A \to B$，且 f 为双射函数，则 $f^{-1}: B \to A$，且也为双射函数.

证明 (1) 证明 f^{-1} 是函数.

因为 f 是单射的，因而 f 是单根的，由定理 3.8 知 f^{-1} 是函数.

(2) 证明 $\mathrm{dom} f^{-1} = B$，且 $\mathrm{ran} f^{-1} = A$.

由定理 2.4 及 $f \in (A \to B)$ 及 f 是满射的，易知 $\mathrm{dom} f^{-1} = \mathrm{ran} f = B$，且 $\mathrm{ran} f^{-1} = \mathrm{dom} f = A$.

由(1)，(2)可知，$f^{-1}: B \to A$，且 f^{-1} 是满射的. 下面只需证明 f^{-1} 是单射的.

因为 f 是函数，因而它是关系，由定理 3.8 和 f^{-1} 是单根的，因而它是单射的.

综上所述，$f^{-1}: B\to A$ 且为双射的. ∎

由定理 3.9，我们给出反函数的定义.

定义 3.10 设 $f: A\to B$，如果 f 是双射的，则称 f 的逆 f^{-1} 为 f 的反函数.

【例 3.5】 下列函数中，哪些具有反函数，有反函数的，请写出反函数.

(1) 设 $f_1: Z^+\to Z^+$，$Z^+=\{x\mid x\in Z\wedge x>0\}$，且 $f_1(x)=x+1$；

(2) 设 $f_2: Z^+\to Z^+$，Z^+ 同(1)，且

$$f_2(x)=\begin{cases}1, & x=1,\\ x-1, & x>1.\end{cases}$$

(3) 设 $f_3: R\to R$，且 $f_3(x)=x^3$.

(4) 设 $f_4: R\to B$，$f_4(x)=e^x$，其中 $B=\{x\mid x\in R\wedge x>0\}$.

(5) 设 $f_5: A\to R$，$f_5(x)=\sqrt{x}$，其中 $A=\{x\mid x\in R\wedge x\geq 1\}$.

解 易知，f_1 为单射，但非满射，f_2 为满射，但非单射；f_5 为单射，但非满射，因此，f_1,f_2,f_5 都不是双射函数，因而都无反函数. 而 f_3,f_4 均为双射函数，所以都有反函数，且

$$f_3^{-1}: R\to R，且\ f_3^{-1}(x)=x^{\frac{1}{3}}；$$

$$f_4^{-1}: B\to R，且\ f_4^{-1}(x)=\ln x.$$

【例 3.6】 构造 $N\times N$ 到 N 的双射函数，并求其反函数.

解 构造 $N\times N$ 到 N 的双射函数的方法不只一种，下面利用自然数的特殊表示法来构造.

设 $n\in N\wedge n\neq 0$，则 n 可唯一地分解成如下形式：

$$n=2^{\alpha}\cdot\beta,$$

其中 $\alpha,\beta\in N$ 且 β 为奇数，而对于任意的 $n\in N$，$n+1\geq 1$，于是存在唯一的自然数 α 和 β(奇数)，使得

$$n+1=2^{\alpha}\cdot\beta\Longleftrightarrow n=2^{\alpha}\cdot\beta-1,$$

因为 β 为奇数，因而存在 $j\in N$，使得 $\beta=2j+1$，于是，对于任意的自然数 n，唯一地存在 $\alpha, j\in N$，使得

$$n=2^{\alpha}(2j+1)-1 \qquad (*)$$

(*)说明任意自然数 $n\in N$ 与有序对 $<\alpha, j>$ 一一对应. 构造 f 如下：

$f:N\times N\to N$，且对于任意的 $i, j\in N$，令 $f(<i,j>)=2^{i}(2j+1)-1$，易知 f 是单射的，并且是满射的，所以是双射的.

由定理 3.9 可知，f^{-1} 为 N 到 $N\times N$ 的双射函数. 其实，由(*)可知，任意的 $n\in N$，存在唯一的 $i, j\in N$，使得 $n=2^{i}(2j+1)-1$，于是取

$$f^{-1}(n)=f^{-1}(2^{i}(2j+1)-1)=<i,j>,$$

则 $f^{-1}:N\to N\times N$，且 f^{-1} 是双射的.

下面计算几个函数及反函数值：

$f(<0,0>)=0$，$f(<0,1>)=2$，$f(<1,0>)=1$，

$f(<1,5>)=21$，$f(<2,2>)=19$，$f(<2,3>)=27$，

$f^{-1}(0)=<0,0>$，$f^{-1}(2)=<0,1>$，$f^{-1}(3)=<2,0>$，

$f^{-1}(5)=<1,1>$.

从以上的计算，发现下面事实，即

$$f\circ f^{-1}(x)=f(f^{-1}(x))=x,$$

$$f^{-1}\circ f(<x,y>)=f^{-1}(f(<x,y>))=<x,y>.$$

一般情况下，设 $f:A\to B$ 且为双射，由定理 3.9 知，$f^{-1}:B\to A$ 也为双射，并且 $f^{-1}\circ f=I_A:A\to A$，$f\circ f^{-1}=I_B:B\to B$.

定义 3.11 设 $f:A\to B$，$g:B\to A$，如果 $g\circ f=I_A$，则称 g 为 f 的**左逆**，又若 $f\circ g=I_B$，则称 g 为 f 的**右逆**.

若 $f:A\to B$ 为双射，f^{-1} 既是 f 的左逆，又是 f 的右逆.

定理 3.10 设 $f:A\to B$，且 $A\neq\varnothing$.

(1) f 存在左逆当且仅当 f 是单射的；

(2) f 存在右逆当且仅当 f 是满射的；

(3) f 既有左逆又有右逆当且仅当 f 是双射的；

(4) 如果 f 是双射的，则 f 的左逆与右逆相等.

证明 (1) 先证必要性.

设 g 是 f 的一个左逆，即 $g\circ f=I_A$，而 I_A 是单射的，由定理 3.5 可知 f 是单射的.

再证充分性.

因为 f 是单射的，从而 $f:A\to \mathrm{ran}f$ 是双射的，由定理 3.9 知，$f^{-1}\upharpoonright \mathrm{ran}f:\mathrm{ran}f\to A$ 是双射的. 由于 $A\neq\varnothing$，故存在 $a\in A$，构造 g 如下：

$$g(y)=\begin{cases} f^{-1}(y), & y\in \mathrm{ran}f\subseteq B, \\ a, & y\in B-\mathrm{ran}f, \end{cases}$$

则 $g:B\to A$ 为 f 的一个左逆. 由 g 的构造可知，对于任意的 $x\in A$，

$$g\circ f(x)=g(f(x))=f^{-1}(f(x))=x.$$

即 $g\circ f=I_A$，所以 g 是 f 的左逆.

(2) 先证必要性.

设 h 是 f 的一个右逆，即 $f\circ h=I_B$，因为 I_B 是满射的，由定理 3.5 可知 f 是满射的.

再证充分性.

由于 f 不一定是单射的，因而 f^{-1} 不一定是函数，但 f^{-1} 一定是定义域为 B 的二元关系. 构造函数 $h:B\to A$[①] 如下：

对于任意的 $y\in B$，由于 f 是满射的，因而 $f^{-1}(\{y\})=\{x\mid f(x)=y\}\neq\varnothing$. 取一个 $x_0\in f^{-1}(\{y\})$，并令 $h(y)=x_0$，则 $h:B\to A$ 为 f 的一个右逆，由定义不难看出，任意的 $y\in B$，

$$f\circ h(y)=f(h(y))=f(x_0')=y.$$

其中 x_0' 是构造 h 时，y 对应的函数值，于是

$$f\circ h=I_B.$$

① 公理集合论中选择公理的形式之一为：对于任意的二元关系 R，都存在函数 $F\subseteq R$，且 $\mathrm{dom}F=\mathrm{dom}R$. 由此公理可知，构造 $h:B\to A$ 是办得到的.

则 h 为 f 的一个右逆.

(3) 由(1)与(2)可知(3)是成立的.

(4) 由(1),(2)可知,f 的左逆和右逆都是存在的,设 $g:B\to A$ 为 f 的一个左逆,$h:B\to A$ 为 f 的一个右逆,即 $g\circ f=I_A$,且 $f\circ h=I_B$. 由定理 3.6 知 $g=g\circ I_B=g\circ(f\circ h)=(g\circ f)\circ h=I_A\circ h=h$. ■

其实,若 $f:A\to B$ 双射,则 $f^{-1}:B\to A$ 既是 f 的左逆,又是 f 的右逆,而且再无其他的左逆和右逆.

【例 3.7】 (1) 设 $f:N\to N$,且 $f(x)=2x$,试求 f 的一个左逆;

(2) 设 $f:N\to(N-\{0,1,\cdots,10\})$,且

$$f(x)=\begin{cases}11, & x\in\{0,1,\cdots,10\},\\ x, & x\in N-\{0,1,\cdots,10\},\end{cases}$$

试求 f 的一个右逆.

(3) 设 $f:Z\to Z$,且 $f(x)=-x$,试求 f 的一个左逆和一个右逆.

解 (1) 由定理 3.10 可知,f 的左逆是存在的,并且可以有多个. 令

$$g_1:N\to N,\text{且 } g_1(y)=\begin{cases}\dfrac{y}{2}, & y\text{ 为偶数},\\ y, & y\text{ 为奇数}.\end{cases}$$

则 g_1 是 f 的一个左逆,对于任意的 $x\in N$,

$$g_1\circ f(x)=g_1(f(x))=x,$$

所以,$g_1\circ f=I_N$,故 g_1 是 f 的一个左逆.

取 $g_2:N\to N$,且

$$g_2(y)=\begin{cases}\dfrac{y}{2}, & y\text{ 为偶数},\\ 0, & y\text{ 为奇数}.\end{cases}$$

则 g_2 也是 f 的一个左逆.

(2) 由定理 3.10 可知，f 的右逆是存在的，取 $h:(N-A)\to N$，其中 $A=\{0,1,\cdots,10\}$，且

$$h(y)=\begin{cases}0, & y=11,\\ y, & y\neq 11,\end{cases}$$

则对于任意的 $y\in N-A$，

$$f\circ h(y)=f(h(y))=\begin{cases}11, & y=11,\\ y, & y\neq 11,\end{cases}$$

可知 $f\circ h=I_{N-A}$.

其实，还可以构造出不同的 f 的右逆.

(3) 因为 f 是双射的，由定理 3.10 可知，f 的左逆，右逆均存在且相等，并且均为 f^{-1}，$f^{-1}:N\to N$，且 $f^{-1}(y)=y$.

习 题 三

1. 设 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{a,b,c,d,e\}$，问下列二元关系中哪些属于 $A\mapsto B$（A 到 B 的偏函数集合）？哪些属于 $A\to B$（A 到 B 的函数（全函数）的集合）？

$R_1=\{<1,a>,<2,a>,<3,b>,<4,<a,b>>\}$；

$R_2=\{<1,a>,<2,b>,<3,c>,<1,d>\}$；

$R_3=\{<2,e>,<3,d>,<4,b>\}$；

$R_4=\{<1,a>,<2,b>,<3,c>,<1,d>\}$；

$R_5=\{<1,2>,<2,b>,<3,c>,<4,d>\}$；

$R_6=\{<1,c>,<2,c>,<3,c>,<4,c>\}$；

$R_7=\{<3,e>,<4,d>\}$.

2. 设 $f,g\in A\to B$，且 $f\cap g\neq\varnothing$，$f\cap g$，$f\cup g$ 还是函数吗？是函数的，还属于 $A\to B$ 吗？

3. 下列函数中，哪些是单射的？哪些是满射的？哪些是双射的？

(1) $f:R\to R$，$f(x)=x^2+1$；

(2) $f:N\to N$，$f(x)=x+1$；

(3) $f:N\to N$，$f(x)=x$ 除以 3 的余数；

(4) $f:R\to\left[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right]$, $f(x)=\frac{3}{2}\sin x$;

(5) $f:R-\{0\}\to R$, $f(x)=\lg|x|$;

(6) $f:R^+\to R$, $f(x)=\frac{1}{2}\ln x$，其中 R^+ 为正实数集；

(7) $f:N\to P(N)$, $f(x)=\{k|k$ 是小于 x 的素数$\}$；

(8) $f:R\to R$, $f(x)=x^2-2x-15$;

(9) $f:N\to\{0,1\}$, $f(x)=\begin{cases}0, & x\text{ 为奇数},\\ 1, & x\text{ 为偶数};\end{cases}$

(10) $f:(-\infty,1]\to[-1,+\infty)$, $f(x)=x^2-2x$.

4. 设 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{1,2\}$，令 $\mathscr{A}=P(A)$，$\mathscr{B}=A\to B$，构造一个 $\mathscr{A}$ 到 $\mathscr{B}$ 的双射函数，再构造一个 $\mathscr{B}$ 到 $\mathscr{A}$ 的双射函数.

5. 证明：若 $A\to B=B\to A$，则 $A=B$.

6. 设 A,B,C 为三个集合，已知 $A\subseteq B$，证明 $(C\to A)\subseteq(C\to B)$.

7. 设 $f:A\to A$，试证明：如果 $f\subseteq I_A$，则 $f=I_A$.

8. 设 $f:A\to A$，试证明：如果 $I_A\subseteq f$，则 $f=I_A$.

9. 试给出集合 A 及 $A\to A$ 的两个函数 f 和 g，使得 f 是单射的，g 是满射的，但它们都不是双射的.

10. 设 $f,g\in A\to B$，已知 $f\subseteq g$ 且 $\mathrm{dom}g\subseteq\mathrm{dom}f$，试证明 $f=g$.

11. 设 $f:A\to B$，定义 $g:B\to P(A)$ 如下，对于任意的 $b\in B$，$g(b)=\{x|x\in A\wedge f(x)=b\}$，证明当 f 为满射的时，g 为单射的.

12. 设 $f:R\times R\to R$，$f(\langle x,y\rangle)=x+y$，又设 $g:R\times R\to R$，$g(\langle x,y\rangle)=x\cdot y$，证明 f,g 都是满射的，但都不是单射的.

13. 设 $\mathscr{E}$ 是集合 A 上全体等价关系集合，$\mathscr{P}$ 是 A 上全体划分的集合，证明存在 $\mathscr{E}$ 到 $\mathscr{P}$ 的双射函数.

14. 设 $\mathscr{A}=[0,1]\to R$，在 $\mathscr{A}$ 上定义二元关系 S 如下：

$$S=\{\langle f,g\rangle|f\in\mathscr{A}\wedge g\in\mathscr{A}\wedge\forall x(x\in[0,1]\to(f(x)-g(x))\geq 0)\},$$

证明 S 是 $\mathscr{A}$ 上的偏序关系，但不是全序.

15. 由 $f:A\to B$ 导出的 A 上的等价关系定义为

$$R=\{\langle x,y\rangle|x\in A\wedge y\in A\wedge f(x)=f(y)\},$$

设 $f_1,f_2,f_3,f_4\in N\to N$，且

$f_1(n)=n$;

$$f_2(n)=\begin{cases}1, & n\text{ 为奇数},\\ 0, & n\text{ 为偶数};\end{cases}$$

$f_3(n)=j$，$n=3k+j$，$j=0,1,2$，$k\in N$；

$f_4(n)=j$，$n=6k+j$，$j=0,1,\cdots,5$，$k\in N$，

R_i 为 f_i 导出的 N 上的等价关系，$i=1,2,3,4$.

(1) 求商集 N/R_i，$i=1,2,3,4$.

(2) 画出偏序集 $\langle\{N/R_1,N/R_2,N/R_3,N/R_4\},\preccurlyeq\rangle$ 的哈斯图，其中 $\preccurlyeq$ 为划分之间的加细关系.

(3) 求 $H=\{10k \mid k\in N\}$ 在 f_1,f_2,f_3,f_4 下的象.

16. 设 $f:R\to R$，$f(x)=x^2-2$，

$g:R\to R$，$g(x)=x+4$，

$h:R\to R$，$h(x)=x^3-1$，

试分析 $g\circ f$ 和 $f\circ g$ 各有哪些性质，f,g,h 中哪些有反函数？若有反函数请求出来.

17. 设 R 是 A 上的等价关系，在什么条件下自然映射 $g:A\to A/R$ 有反函数？并求出反函数.

18. 设偏函数

$$f:R\nrightarrow R,\ f(x)=\frac{1}{x};$$

$$g:R\nrightarrow R,\ g(x)=x^2\ (g\text{ 也是全函数，即 }g:R\to R);$$

$$h:R\nrightarrow R,\ h(x)=\sqrt{x}.$$

(1) 求 f,g,h 的定义域和值域.

(2) 改变 f,g,h 的前域，使 f,g,h 成为函数（全函数）.

19. 设

$$f:N\to N,\ f(x)=\begin{cases}x+1, & x=0,1,2,3,\\ 0, & x=4,\\ x, & x\geqslant 5;\end{cases}$$

$$g:N\to N,\ g(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & x\text{ 为偶数},\\ 3, & x\text{ 为奇数}.\end{cases}$$

(1) 设 $A_1=\{0,1,2\}$，$B_1=\{0,1,5,6\}$，求象 $f(A_1)$，原象 $f^{-1}(B_1)$；

(2) 设 $A_2=\{x \mid x\in N\wedge x\text{ 为偶数}\}$，$B_2=\{3\}$，求象 $g(A_2)$ 和原象 g

(B).

(3) f 与 g 都有反函数吗?

20. 设 $g: A \to B$, $f: B \to C$.

(1) 已知 $f \circ g$ 是单射的且 g 满射的,证明 f 是单射的;

(2) 已知 $f \circ g$ 是满射的且 f 是单射的,证明 g 是满射的.

21. 设 $f, g \in (X \to Y)$, 又设 $A = \{x \mid x \in X \land f(x) = g(x)\}$, $h_1: A \to X$, $h_1(x) = x$, 证明 $f \circ h_1 = g \circ h_1$. 又设 $B \subseteq X$, $h_2: B \to X$, $h_2(x) = x$, 且已知 $f \circ h_2 = g \circ h_2$, 证明 $B \subseteq A$.

22. 设 $h \in (X \to X)$, 证明:对于任意的 $f, g \in (X \to X)$, 只要 $h \circ f = h \circ g$ 就有 $f = g$ 当且仅当 h 是单射的. 并且只要 $f \circ h = g \circ h$ 就有 $f = g$, 当且仅当 h 是满射的.

23. 设 $f: A \to A$, 若存在正整数 n, 使得 $f^n = I_A$, 证明 f 是双射的.

24. 设 $f: X \to Y$, $A \subseteq Y$ 且 $B \subseteq Y$, 证明:

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

25. 设 $f: A \to B$, 定义 g 如下: $g: B \to P(A)$, 且对于任意的 $b \in B$,

$$g(b) = \{x \mid x \in A \land f(x) = b\} = f^{-1}(\{b\}).$$

证明:如果 f 是满射的,则 g 是单射的.

第四章　自　然　数

本章中将给出自然数的集合定义，并且讨论自然数的性质. 在本章中，若无特殊声明，将集合中的元素均看成集合.

§4.1　自然数的定义

定义 4.1　设 F 为一个函数，集合 $A\subset \mathrm{dom}F$，如果对于任意的 $x\in A$，均有 $F(x)\in A$，则称 A 在函数 F 下是**封闭的**.

例如，取 $F:N\to N$，且 $F(n)=n+1$，取 $A=N$，则 A 在 F 下是封闭的. 若取 $B=\{1,2,\cdots,10\}$，则 $B\subset N$，而 B 在函数 F 下不封闭.

1889 年，皮亚诺(Peano)为了给出自然数及自然数集合 N 的集合定义，给出了满足 5 条公设的系统，后人称其为 Peano 系统.

Peano 系统是满足 5 个公设的有序三元组 $\langle M,F,e\rangle$，其中 M 为一个集合，F 为 M 到 M 的函数，e 为首元素，5 条公设为：

(1) $e\in M$;

(2) M 在 F 下是封闭的；

(3) $e\notin \mathrm{ran}F$;

(4) F 是单射的；

(5) 如果 M 的子集 A 满足：

① $e\in A$;

② A 在 F 下是封闭的，则 $A=M$.

如果用 $F^r(e)$ 表示 $\overbrace{FF\cdots F}^{r\text{个}}(e)$，则(1)～(4)说明函数 $F:M\to M$，且关系图如图 4.1 所示.

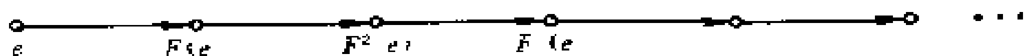


图 4.1

公设 5 称为**极小性公设**.

定义 4.2 设 A 为一个集合，称 $A\cup\{A\}$ 为 A 的**后继**，记作 A^+，并称求集合的后继为**后继运算**.

由定义不难看出，$A\subset A^+\wedge A\in A^+$，这是集合后继的最重要的性质.

【例 4.1】 求下列集合的后继的后继的后继.

(1) $\varnothing$；

(2) $A=\{a\}$；

(3) $B=\{\varnothing,a\}$；

解

(1) $\varnothing^+=\varnothing\cup\{\varnothing\}=\{\varnothing\}$.

$\varnothing^{++}=\varnothing^+\cup\{\varnothing^+\}=\{\varnothing\}\cup\{\{\varnothing\}\}=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$.

$\varnothing^{+++}=\varnothing^{++}\cup\{\varnothing^{++}\}=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$.

(2) $A^+=A\cup\{A\}=\{a\}\cup\{\{a\}\}=\{a,\{a\}\}$.

$A^{++}=A^+\cup\{A^+\}=\{a,\{a\},\{a,\{a\}\}\}$.

$A^{+++}=\{a,\{a\},\{a,\{a\}\},\{a,\{a\},\{a,\{a\}\}\}\}$.

(3) $B^+=\{\varnothing,a,\{\varnothing,a\}\}$.

$B^{++}=\{\varnothing,a,\{\varnothing,a\},\{\varnothing,a,\{\varnothing,a\}\}\}$.

$B^{+++}=\{\varnothing,a,\{\varnothing,a\},\{\varnothing,a,\{\varnothing,a\}\},$
$\{\varnothing,a,\{\varnothing,a\},\{\varnothing,a,\{\varnothing,a\}\}\}\}$.

定义 4.3 设 A 为一个集合，若 A 满足：

(1) $\varnothing\in A$，

(2) 若 $\forall a\in A$，则 $a^+\in A$，

则称 A 是**归纳集**.

例如 $\{\varnothing,\varnothing^+,\varnothing^{++},\cdots\}$ 是归纳集；$\{\varnothing,\varnothing^+,\varnothing^{++},\cdots,a,a^+,$

a^{+},⋯ 是归纳集;

而当 $a\neq\varnothing$ 时,$\{a,a^{+},a^{++},\cdots\}$ 不是归纳集.

从归纳集的定义可以看出,$\varnothing,\varnothing^{+},\varnothing^{++},\cdots$ 是所有归纳集的元素,于是可以将它们定义成自然数.

定义 4.4 自然数是属于每个归纳集的集合.

从定义 4.4 及 $\{\varnothing,\varnothing^{+},\varnothing^{++},\cdots\}$ 是归纳集可知,$\varnothing,\varnothing^{+},\varnothing^{++},\cdots$ 都是自然数,分别记为 $0,1,2,\cdots$,并且任意的自然数 n 的后继 $n^{+}=n\cup\{n\}$,为 n 后面紧临的自然数:

$0=\varnothing$,

$1=0^{+}=\{0\}$,

$2=1^{+}=\{0,1\}$,

⋮

$n^{+}=\{0,1,2,\cdots,n\}$.

定义 4.5 设 $D=\{v \mid v$ 是归纳集$\}$[1],称 $\bigcap D$ 为全体自然数集合,记作 N.

由定义不难看出全体自然数集合 N 是所有归纳集的子集,并且它是归纳集.

定理 4.1 N 是归纳集.

证明 (1) 因为 $\varnothing$ 属于每一个归纳集,所以 $\varnothing\in\bigcap D\Longleftrightarrow\varnothing\in N$.

(2) $\forall a$,

$$
\begin{aligned}
& a\in N\Longleftrightarrow a\in\bigcap D\\
\Rightarrow\ & \forall v(v\text{ 是归纳集}\rightarrow a\in v)\\
\Rightarrow\ & \forall v(v\text{ 是归纳集}\rightarrow a^{+}\in v)\\
\Rightarrow\ & a^{+}\in\bigcap D\Longleftrightarrow a^{+}\in N.
\end{aligned}
$$

由(1),(2)可知 N 是归纳集. ▌

---

[1] $D=\{v \mid v$ 为归纳集$\}$ 作为集合隐含着集合论悖论,在 ZF 和 ZFC 公理系统中,D 不是集合

定理 4.2 设 N 为自然数集合，$\sigma: N \to N$，且 $\sigma(n)=n^+$（称 σ 为后继函数），则 $<N,\sigma,\varnothing>$ 是 Plano 系统.

证明 只要证明 $<N,\sigma,\varnothing>$ 满足 5 条公设.

由定理 4.1 可知(1)，(2)成立，即

(1) $\varnothing \in N$;

(2) 若 $n \in N$，则 $\sigma(n)=n^+ \in N$.

(3) $\forall n \in N, \sigma(n)=n^+=n \cup \{n\} \neq \varnothing$，所以 $\varnothing \notin \mathrm{ran}\sigma$;

(4) 待证(应用定理 4.3 证明之).

(5) 设 $S \subset N$，且满足

① $\varnothing \in S$，

② 若 $n \in S$，则 $n^+ \in S$，

要证明 $S=N$.

只需证明 $N \subseteq S$. 由①，②可知 S 是归纳集，因而 $S \in D$，于是 $N=\bigcap D \subseteq S$. 这就证明了 $<N,\sigma,\varnothing>$ 满足第 5 条公设. ∎

第 5 条公设提出了证明自然数性质的一种方法，这就是数学归纳法，称此公设为数学归纳法原理.

要证明任意的自然 n 都有性质 P，即证 $P(n)$ 为真，先构造集合 $S=\{n \mid n \in N \land P(n)\}$，由 S 的构造可知 $S \subseteq N$，若能证明 S 是归纳集，即满足：① $\varnothing \in S$，② $\forall n \in S$，则 $n^+ \in S$，由公设 5 可知 $S=N$，即说明全体自然数都有性质 P. 用数学归纳法证明自然数性质时，应分两个步骤：

第一，构造 $S=\{n \mid n \in N \land P(n)\}$；

第二，证明 S 是归纳集.

定理 4.3 任何自然数的元素都是它的子集.

证明 用数学归纳法证明之.

(1) 设 $S=\{n \mid n \in N \land \forall x(x \in n \to x \subseteq n)\}$.

(2) 证明 S 是归纳集.

① $\forall x(x \in \varnothing \to x \subseteq \varnothing)$ 为真，所以 $\varnothing \in S$.

② 设 $n \in S$，则 $n \in N \land \forall x(x \in n \to x \subseteq n)$ 为真. 由定理 4.1

知，$n^+\in N$. 并且$\forall x$

$$x\in n^+=n\cup\{n\}\Rightarrow x=n\vee x\in n$$

ⓐ若$x=n$，因为$n\subset n^+$，所以$x\subset n^+$.

ⓑ若$x\in n$，由S的构造可知，$x\subseteq n\subset n^+$，则$x\subset n^+$.

ⓐ、ⓑ说明$n^+\in S$，由数学归纳法原理可知$S=N$. ▌

用定理4.3证明定理4.2中的(4)，即证：σ是单射的：若$m^+=n^+$，则$m=n$.

用反证法证明：否则，$m\neq n$.

$n\in n^+=m^+=m\cup\{m\}\Rightarrow n\in m\vee n=m$，但$n\neq m$，因而$n\in m$，由定理4.3及$n\neq m$知$n\subset m$，类似可证$m\subset n$，这是矛盾的. ▌

定理4.4 对于任意的自然数m,n，则$m^+\in n^+$当且仅当$m\in n$.

证明 先证必要性.

$m^+\in n^+=n\cup\{n\}$

$\Rightarrow m^+\in n\vee m^+=n$.

(1) $m^+\in n$.

$m\in m^+\wedge m^+\in n\Rightarrow m\in m^+\wedge m^+\subset n$ （定理4.3）

$\Rightarrow m\in n$.

(2) $m^+=n$.

$m\in m^+\vee m^+=n\Rightarrow m\in n$.

再证充分性.

用数学归纳法证明.

(1) 设$S=\{n|n\in N\wedge\forall m(m\in n\rightarrow m^+\in n^+)\}$.

(2) $\forall m(m\in\varnothing\rightarrow m^+\in\varnothing^+)$为真，所以，$\varnothing\in S$.

设$n\in S$，下面证明$n^+\in S$.

$\forall m$，

$$m\in n^+=n\cup\{n\}\Rightarrow m\in n\vee m=n.$$

(1) $m\in n\Rightarrow m^+\in n^+$（由$S$的构造）

$\Rightarrow m^+\in n^{++}$（$n^+\subseteq n^{++}$）.

② $m = n \Rightarrow m^+ = n^+ \Rightarrow m^+ \in n^{++}$.

于是 $S = N$. ▌

定理 4.5 任何自然数都不是自己的元素.

证明 用数学归纳法证明.

(1) 设 $S = \{n \mid n \in N \land n \notin n\}$.

(2) $\varnothing \in N \land \varnothing \notin \varnothing$ 为真. 所以 $\varnothing \in S$.

设 $n \in S$, 下面证明 $n^+ \in S$, 即由 $n \notin n$, 证明 $n^+ \notin n^+$. 由定理 4.4 可知结论正确, 于是 S 是 N 的归纳子集, 因而 $S = N$. ▌

定理 4.6 空集属于除零外的一切自然数.

证明 用数学归纳法证明.

(1) 设 $S' = \{n \mid n \in N \land n \neq 0 \land \varnothing \in n\}$, 再设 $S = S' \cup \{0\}$. 下面证明 S 是 N 的归纳子集.

(2) 显然 $\varnothing = 0 \in S$.

假设 $n \in S$, 下面证 $n^+ \in S$.

$$n^+ = n \cup \{n\}.$$

① $n = 0$, 此时 $n^+ = 0^+ = \varnothing^+ = \{\varnothing\}$, 显然有 $\varnothing \in n^+$.

② $n \neq 0$, 由 S 的构造可知, $n \in S'$, 于是, $\varnothing \in n \subset n^+$, 因而 $\varnothing \in n^+$.

由①, ②知, $S = N$, 而 $S' = S - \{\varnothing\} = S - \{0\}$, 于是 $\varnothing$ 属于除零外的一切自然数.

定理 4.7(三歧性定理) 对于任意的自然数 m, n, 下面三式中有且仅有一式成立:

$$m \in n, m = n, n \in m.$$

证明 先证明以上三式中至多成立一式. 由对称性, 只需证明 $m \in n$, $m = n$, 不能同时成立, 又 $m \in n$ 与 $n \in m$ 不能同时成立. 其实,

(1) 若 $m \in n \land m = n$, 则 $m \in m$, 这与定理 4.5 矛盾;

(2) 若 $m \in n \land n \in m$, 则 $m \in n \land n \subseteq m$(由定理 4.3), 于是得出 $m \in m$, 这又矛盾于定理 4.5.

下面用数学归纳法证明三式中至少成立一式.

(1) 设 $S=\{n \mid n\in N \wedge \forall m(m\in N \rightarrow m\in n \vee m=n \vee n\in m)\}$.

① 证明 $0\in S$. 任意的 $m\in N$, $m=0$ 或 $m\neq 0$. 无论哪种情况, 由定理 4.6 可知, $m\in 0 \vee m=0 \vee 0\in m$ 为真. 于是 $0\in S$.

② 设 $n\in S$, 下面证明 $n^+\in S$.

$n\in S$, 即对于任意 $m\in N$, $m\in n \vee m=n \vee n\in m$ 为真.

ⓐ $m\in n\subseteq n^+ \Rightarrow m\in n^+$;

ⓑ $m=n\in n^+ \Rightarrow m\in n^+$;

ⓒ $n\in m \Leftrightarrow n^+\in m^+$ (定理 4.4)

$\Leftrightarrow n^+\in m\cup\{m\}$

$\Leftrightarrow n^+=m \vee n^+\in m$.

由ⓐ, ⓑ, ⓒ可知 $n^+\in S$, 于是 $S=N$. ▌

定义 4.6 设 $\langle M_1,F_1,e_1\rangle$, $\langle M_2,F_2,e_2\rangle$ 是两个 Peano 系统, 若存在双射函数 h, 满足:

(1) $h:M_1\rightarrow M_2$,

(2) $h(e_1)=e_2$,

(3) $h(F_1(n))=F_2(h(n))$,

则称 $\langle M_1,F_1,e_1\rangle$ 与 $\langle M_2,F_2,e_2\rangle$ 是**相似的**, 记作 $\langle M_1,F_1,e_1\rangle \sim \langle M_2,F_2,e_2\rangle$.

定理 4.8(*N* **上的递归定理**) 设 A 为一个集合, 且 $a\in A$, $F:A\rightarrow A$, 则存在唯一的一个函数 $h:N\rightarrow A$, 使得 $h(0)=a$, 且对于任意 $n\in N$,

$$h(n^+)=F(h(n)).$$

证明请参阅参考书目[1].

定理 4.9 设 $\langle M,F,e\rangle$ 为任意一个 Peano 系统, 则 $\langle N,\sigma,0\rangle \sim \langle M,F,e\rangle$.

证明 由 Peano 系统之间相似的定义可知, 只要证明存在 N 到 M 的双射函数 $h:N\rightarrow M$, $h(0)=e$, $h(n^+)=F(h(n))$ 即可.

由定理 4.8 可知, 存在唯一的函数 h 满足:

$$h: N \to M, h(0) = e, \text{且 } h(n^+) = F(h(n)).$$

于是只要证明 h 是双射的就完成本定理的证明.

(1) 证明 h 是满射的,即证 $\operatorname{ran}h = M$.

由 Peano 第五条公设,只要证明 $\operatorname{ran}h$ 为 M 的归纳子集. $\operatorname{ran}h \subseteq M$ 是显然的. $e \in \operatorname{ran}h$ 也是已知的. 下面又只需证明:对于任意的 x,若 $x \in \operatorname{ran}h$,则 $F(x) \in \operatorname{ran}h$. 因为 $x \in \operatorname{ran}h$,因而存在 $n \in N$,使得 $h(n) = x$,于是 $h(n^+) = F(h(n)) = F(x) \in \operatorname{ran}h$. 这就证明了 $\operatorname{ran}h$ 是 M 的归纳子集,因而 $\operatorname{ran}h = M$.

(2) 再证明 h 是单射的,用数学归纳法证明,设 $S = \{n \mid n \in N \land \forall m(m \in N \land h(m) = h(n) \to m = n)\}$.

① 证明 $0 \in S$. 只要证明 $h(m) = h(0) = e$,则 $m = 0$. 否则,存在 $k \in N$,使得 $m = k^+$,则 $h(m) = h(k^+) = F(h(k)) \in \operatorname{ran}F$,这与 $h(m) = h(0) = e \notin \operatorname{ran}F$ 相矛盾,于是 $m = 0$,故 $0 \in S$.

② 设 $n \in S$,要证明 $n^+ \in S$. $\forall m \in N$,如果 $h(m) = h(n^+)$,则 $m \neq 0$. 否则,$h(0) = h(n^+) = F(h(n)) \in \operatorname{ran}F$,这与 $h(0) = e \notin \operatorname{ran}F$ 矛盾,因而 $m \neq 0$,于是存在 k,使得 $m = k^+$,因而 $h(m) = h(k^+) = F(h(k)) = h(n^+)$. 从而得出 $F(h(k)) = F(h(n))$. 又因为 F 是单射的,所以 $h(k) = h(n)$,由 $n \in S$ 可知 $k = n$,所以 $k^+ = m = n^+$,因而 $n^+ \in S$,于是 $S = N$.

综上所述,h 是双射的. ▌

§4.2 传递集合

定义 4.7 设 A 为一个集合,如果 A 中任何元素的元素也是 A 的元素,则称 A 为**传递集合**,简称**传递集**,即

$$A \text{ 为传递集} \Leftrightarrow \forall x \forall y (x \in y \land y \in A \to x \in A).$$

定理 4.10 设 A 为一个集合,则下面命题是等价的:

(1) A 是传递集;

(2) $\bigcup A \subseteq A$;

(3) 对于任意的 $y \in A$，则 $y \subseteq A$;

(4) $A \subseteq P(A)$.

证明 (1) $\Rightarrow$(2)，任意的 x，

$$x \in \bigcup A \Rightarrow \exists y(y \in A \wedge x \in y)$$

$$\Rightarrow x \in A, \qquad \text{(因为 } A \text{ 是传递集)}$$

所以，$\bigcup A \subseteq A$.

(2) $\Rightarrow$(3)，对于任意的 y，

$$y \in A \Rightarrow y \subseteq \bigcup A$$

$$\Rightarrow y \subseteq A. \qquad \text{(因为 } \bigcup A \subseteq A\text{)}$$

所以，$\forall y \in A$，则 $y \subseteq A$.

(3) $\Rightarrow$(4). 对于任意的 y，

$y \in A \Rightarrow y \subseteq A$ (由(3))

$\Rightarrow y \in P(A)$.

(4) $\Rightarrow$(1). 对于任意的 y.

$y \in A \Rightarrow y \in P(A)$ (由(4))

$\Rightarrow y$ 是 A 的子集 $\Rightarrow y$ 中元素为 A 的元素

$\Rightarrow A$ 是传递集 ▌

有了定理 4.10，判断一个集合是否为传递集，可以有多种方法.

【例 4.2】 判断下列集合中，哪些是传递集.

(1) A [illegible] $\varnothing$, $\varnothing$ [illegible], [illegible] $\varnothing$ [illegible]};

(2) B [illegible] 0,1,2 [illegible];

(3) C [illegible] {a [illegible]

(4) D [illegible] 0,1 [illegible]

解 (1) $\bigcup A$ [illegible] $\varnothing$, [illegible] $\subseteq A$，由定理 4.10 可知，A 是传递集.

(2) $\bigcup B = \bigcup$ [illegible] $\varnothing$, {$\varnothing$ [illegible] $\varnothing$, $\varnothing$ [illegible] {$\varnothing$, {$\varnothing$ [illegible] 0,1 [illegible]，因为 [illegible]0,1}$\subseteq B$，所以 B 也是传递集.

(3) C 中元素 $\{a\}$ 的元素 a 不属于 C，所以 C 不是传递集.

(4) $D=\langle 0,1\rangle=\{\{0\},\{0,1\}\}$，由于 D 中元素 $\{0,1\}$ 的元素 1 不在 D 中，所以 D 不是传递集.

定理 4.11 设 A 为一个集合，则 A 为传递集当且仅当 $P(A)$ 为传递集.

证明 先证必要性. 因为 A 是传递集，由定理 4.10 知道，$A\subseteq P(A)$，又已知 $A=\bigcup P(A)$，于是 $\bigcup P(A)\subset P(A)$，再由定理 4.10 可知，$P(A)$ 是传递集.

再证充分性. 由 $P(A)$ 是传递集及 $A=\bigcup P(A)$ 知，$A=\bigcup P(A)\subset P(A)\Rightarrow A\subseteq P(A)$，由定理 4.10 可知 A 是传递集. ▌

定理 4.12 设 A 是传递集，则 $\bigcup(A^+)=A$.

证明
$$
\begin{aligned}
\bigcup A^+ &= \bigcup(A\cup\{A\})\\
&= (\bigcup A)\cup(\bigcup\{A\})\\
&= (\bigcup A)\cup A
\end{aligned}
$$
因为 A 是传递集，所以 $\bigcup A\subseteq A$，由上式可知，
$$\bigcup A^+=A.$$ ▌

定理 4.13 每个自然数都是传递集.

证明 用数学归纳法证明.

设 $S=\{n\mid n\in N\land n$ 是传递集$\}$.

(1) $0\in S$ 是显然的.

(2) 设 $n\in S$，下面证明 $n^+\in S$.

由于 $n\in S$，即 n 为传递集，由定理 4.12 知，$\bigcup n^+=n\subset n^+$，所以 $\bigcup n^+\subset n^+$，又由定理 4.10 可知，n^+ 是传递集，所以 $n^+\in S$，故有 $S=N$. ▌

定理 4.14 自然数集合 N 是传递集.

证明 由定理 4.10，只需证明，对于任意的 $n\in N$，均有 $n\subseteq N$，还是用归纳法证明. 设
$$S=\{n\mid n\in N\land n\subseteq N\}.$$

(1) $0\in S$ 显然.

(2) 设 $n\in S$，要证 $n^+\in S$，由 $n\in S$，则 $n\subset N$，又 $\{n\}\subseteq N$，所以，$n\cup\{n\}=n^+\subseteq N$，故 $n^+\in S$，所以，$S=N$. ∎

§4.3 自然数的运算

取 $A=N$，$m\in N$，σ 为 N 上的后继函数，由定理 4.8(N 上递归定理)，存在唯一的函数，这里记为 $A_m:N\to N$，使得 $A_m(0)=m$，$A_m(n^+)=\sigma(A_m(n))=(A_m(n))^+$. 下面应用 A_m 定义 N 上的加法运算.

定义 4.8 设 A 为一个集合，称从 $A\times A$ 到 A 的函数，为 A 上的**二元运算**.

下面应用 N 上的二元运算定义自然数的加法、乘法和指数运算.

定义 4.9 令 $+:N\times N\to N$，且对于任意的 $m,n\in N$，$+(\langle m,n\rangle)=A_m(n)\xlongequal{\text{记作}}m+n$，则称 $+$ 为 N 上的加法运算.

由 N 上的递归定理可知，所定义的加法运算是有意义的.

【例 4.3】 由加法定义计算 $3+2$ 和 $5+4$.

解 $3+2=A_3(2)=(A_3(1))^+=((A_3(0))^+)^+$

$=3^{++}=5.$

$5+4=A_5(4)=(A_5(3))^+=((A_5(2))^+)^+=(((A_5(1))^+)^+)^+$

$=((((A_5(0))^+)^+)^+)^+=5^{++++}=9.$

定理 4.15 设 $m,n\in N$，则

$$m+0=m,\qquad\text{(加法规则 1)}$$

$$m+n^+=(m+n)^+.\qquad\text{(加法规则 2)}$$

证明 由定义 4.9 及 A_m 的定义可知

$$m+0=A_m(0)=m,$$

所以加法规则 1 成立.

还是由定义 4.9 及 A_m 的定义可知

$$m+n^{+}=A_m(n^{+})=\sigma(A_m(n))=(m+n)^{+},$$

即加法规则 2 成立. ▌

【例 4.4】 利用加法规则 1,2,计算 $5+4$.

解
$$5+4=5+3^{+}=(5+3)^{+} \qquad \text{(加法规则 2)}$$
$$=(5+2^{+})^{+}=(5+2)^{++} \qquad \text{(加法规则 2)}$$
$$=(5+1^{+})^{++}=(5+1)^{+++} \qquad \text{(加法规则 2)}$$
$$=(5+0^{+})^{+++}=(5+0)^{++++} \qquad \text{(加法规则 2)}$$
$$=5^{++++}$$
$$=9.$$

类似于 A_m 的定义,用 N 上的递归定理构造函数 M_m 如下,$m\in N$,取 $M_m:N\to N$,且满足

$$M_m(0)=0,M_m(n^{+})=M_m(n)+m.$$

这样的函数是存在并且是唯一的,保证下面定义有意义:

定义 4.10 令 $\cdot:N\times N\to N$,且对于任意的 $m,n\in N$,$\cdot(\langle m,n\rangle)=M_m(n)\xlongequal{\text{记作}}m\cdot n$,则称 $\cdot$ 为 N 上的乘法运算.

【例 4.5】 用定义计算 $3\cdot 2$

解
$$3\cdot 2=M_3(2)=M_3(1^{+})=M_3(1)+3=M_3(0^{+})+3$$
$$=M_3(0)+3+3=0+3+3=3+3=A_3(3)$$
$$=A_3(2)^{+}=(A_3(1))^{++}=(A_3(0))^{+++}=3^{+++}=6.$$

定理 4.16 设 $m,n\in N$,则

$$m\cdot 0=0, \qquad \text{(乘法规则 1)}$$
$$m\cdot n^{+}=m\cdot n+m. \qquad \text{(乘法规则 2)}$$

这个定理是 M_m 的定义及定义 4.10 的直接结果.

【例 4.6】 利用乘法规则 1 和 2 重新计算 $3\cdot 2$

解
$$3\cdot 2=3\cdot 1^{+}=3\cdot 1+3 \qquad \text{(乘法规则 2)}$$
$$=3\cdot 0^{+}+3=3\cdot 0+3+3 \qquad \text{(乘法规则 2)}$$
$$=0+3+3 \qquad \text{(乘法规则 1)}$$
$$=3+3 \qquad \text{(加法规则 1)}$$
$$=(3+2)^{+}=(3+1)^{++}=(3+0)^{+++}=3^{+++}=6.$$

再运用 N 上的递归定理构造函数 E_m 如下. 对于任意的 $m\in N$, $E_m: N\to N$, 且满足

$$E_m(0)=1, E_m(n^+)=E_m(n)\cdot m.$$

定义 4.11 设 $\odot: N\times N\to N$, 且对于任意的 $m,n\in N$, $\odot(\langle m,n\rangle)=E_m(n)\overset{\text{记作}}{=\!=}m^n$, 称 $\odot$ 为 N 上的指数运算.

【例 4.7】 用定义计算 3^2.

解 $3^2=E_3(2)=E_3(1)\cdot 3=E_3(0)\cdot 3\cdot 3=1\cdot 3\cdot 3$

$=M_1(3)\cdot 3=(M_1(2)+1)\cdot 3=(M_1(1)+1+1)\cdot 3$

$=(M_1(0)+1+1+1)\cdot 3=(0+1+1+1)\cdot 3=3\cdot 3$

$=M_3(3)=M_3(2)+3=M_3(1)+3+3=M_3(0)+3+3+3$

$=3+3+3=A_3(3)+3=6+3=A_6(3)=\cdots=9.$

定理 4.17 对于任意的自然数 m,n, 则

$$m^0=1, \qquad \text{(指数运算规则 1)}$$

$$m^{n^+}=m^n\cdot m. \qquad \text{(指数运算规则 2)}$$

证明从略.

定理 4.18 设 $m,n,k\in N$, 则

(1) $m+(n+k)=(m+n)+k$;

(2) $m+n=n+m$;

(3) $m\cdot(n+k)=m\cdot n+m\cdot k$;

(4) $m\cdot(n\cdot k)=(m\cdot n)\cdot k$;

(5) $m\cdot n=n\cdot m$.

证明 这里只证加法的交换律, 用归纳法容易证明下面两个等式.

a $\forall n\in N, 0+n=n$;

b $\forall m,n\in N, m^+ +n=(m+n)^+$.

利用(1)、(2)证明加法的交换律, 仍用归纳法. 对于任意的 $m\in N$, 设

$$S=\{n\mid n\in N\wedge m+n=n+m\}.$$

① 证明 $0\in S$.

$$m+0=m,\qquad\text{(加法规则 1)}$$

$$0+m=m.\qquad\text{(a)}$$

所以, $m+0=0+m$, 故 $0\in S$.

② 设 $n\in S$, 下面证明 $n^+\in S$.

$$m+n^+=(m+n)^+,\qquad\text{(加法规则 2)}$$

$$n^++m=(n+m)^+\qquad\text{(b)}$$

$$=(m+n)^+.\qquad\text{(因为 } n\in S\text{)}$$

所以, $m+n^+=n^++m$, 故 $n^+\in S$, 所以, $S=N$. ▌

§4.4 N 上的序关系

定义 4.12 设 $m,n\in N$, 如果 $m\in n$, 则称 m 小于 n, 记作 $m<n$.

于是, $m<n\Longleftrightarrow m\in n$,

$$m\leq n\Longleftrightarrow m\in n\vee m=n\Longleftrightarrow m\,\underline{\in}\,n$$

定义 4.13 (1) 称 $\in_N=\{\langle m,n\rangle\mid m,n\in N\wedge m\in n\}$ 为 N 上的属于关系;

(2) 称 $\underline{\in}_N=\{\langle m,n\rangle\mid m,n\in N\wedge m\,\underline{\in}\,n\}$ 为 N 上的属于等于关系.

(3) 称 $<_N=\{\langle m,n\rangle\mid m,n\in N\wedge m<n\}$ 为 N 上的小于关系;

(4) 称 $\leq_N=\{\langle m,n\rangle\mid m,n\in N\wedge m\leq n\}$ 为 N 上的小于等于关系.

由定义 4.12 知, $\in_N=<_N$, $\underline{\in}_N=\leq_N$.

由定理 4.7(三歧性定理)可知, $\forall m,n\in N$, $m<n$, $m=n$, $n<m$ 三个式子中成立且仅成立一式.

定理 4.19 $\underline{\in}_N(\leq_N)$ 为 N 上的线序关系, $\in_N(<_N)$ 为 N 上

的拟线序关系.

由自然数为传递集及三歧性定理容易证明定理 4.19.

定理 4.20 设 $m,n,k\in N$，则

(1) $m\in n\Leftrightarrow (m+k)\in(n+k)$ ($m<n\Leftrightarrow m+k<n+k$);

(2) $m\in n\Leftrightarrow m\cdot k\in n\cdot k$ ($m<n\Leftrightarrow m\cdot k<n\cdot k$)，$k\neq 0$.

证明 (1) 先证必要性. 已知 $m\in n$，设

$$S=\{k\mid k\in N\wedge (m+k)\in(n+k)\}.$$

1. 证 $0\in S$.

由加法规则 1 可知，$n+0=n$，$m+0=m$，因而由 $m\in n$ 得知 $(m+0)\in(n+0)$，故 $0\in S$.

2. 设 $k\in S$，证 $k^+\in S$.

$m+k\in n+k$ (由 S 的构造及 $k\in S$)

$\Rightarrow (m+k)^+\in(n+k)^+$ (定理 4.4)

$\Rightarrow (m+k^+)\in(n+k^+)$ (加法规则 2)

$\Rightarrow k^+\in S$，所以 $S=N$.

再证充分性. 已知 $(m+k)\in(n+k)$，证明 $m\in n$.

由三歧性定理可知，$m\in n$，$m=n$，$n\in m$ 三式中成立且仅成立一式. 此时若 $m=n$，则应有 $(m+k)\in(m+k)$，这与定理 4.5 矛盾，于是 $m\neq n$. 又若 $n\in m$，由必要性可知，$(n+k)\in(m+k)$，这与已知矛盾，于是只能有 $m\in n$ 成立.

(2) 先证必要性. 用归纳法.

对于 $m,n\in N$ 且 $m\in n$，为使乘数不为 0，令

$$T=\{k\mid k\in N\wedge m\cdot k^+\in n\cdot k^+\}.$$

1. 证 $0\in T$.

$m\cdot 0^+=m\cdot 0+m=m$，$n\cdot 0^+=n\cdot 0+n=n$，由 $m\in n$，得知 $m\cdot 0^+\in n\cdot 0^+$，故 $0\in T$.

2. 设 $k\in T$，下面证明 $k^+\in T$.

$m\cdot k^{++}=m\cdot k^+ + m\in n\cdot k^+ + m$ (由 $k\in T$ 及定理 4.20(1). 应用加法交换律及定理 4.20，可知

$n\cdot k^{+}+m=m+n\cdot k^{+}\in n+n\cdot k^{+}=n\cdot k^{+}+n=n\cdot k^{++}$，于是 $m\cdot k^{++}\in n\cdot k^{++}$，故 $k^{+}\in T$，所以 $T=N$.

再证充分性，由三歧性证明之. ▌

定理 4.21 设 n,m,k 为自然数，

(1) 如果 $m+k=n+k$，则 $m=n$.

(2) 如果 $k\neq 0$，且 $m\cdot k=n\cdot k$，则 $m=n$.

本定理可用 N 的三歧性和定理 4.20 证明之.

定理 4.22（N 上的良序定理） 设 A 为 N 的非空子集，则存在唯一的 $m\in A$，使得对于一切的 $n\in A$，有 $m\in n$（这样的 m 称为 A 的最小元）.

证明 假设 A 中无最小元，将证明 $A=\varnothing$，为此令

$$S=\{k\mid k\in N\wedge\neg\exists n(n\in N\wedge n<k\wedge n\in A)\}$$

(1) $0\in S$ 是显然的.

(2) 假设 $k\in S$，要证明 $k^{+}\in S$.

对于任意的 $n<k^{+}\Longleftrightarrow n\in k^{+}$，而 $k^{+}=k\cup\{k\}$，于是，$n\in k$ 或 $n=k$.

若 $n\in k$，由假设 $k\in S$，因而 $n\notin A$.

若 $n=k$，此时 $n\notin A$，否则，由于比 n 小的元素都不属于 A，n 就成了 A 的最小元了. 这与假设 A 无最小元矛盾，于是 $k^{+}\in S$，因而，$S=N$. 这说明 $A=\varnothing$，这与 A 非空相矛盾.

综上所述，A 存在着最小元.

若存在 m_1 与 m_2 都是 A 的最小元，由 $m_1\in m_2$ 且 $m_2\in m_1$，可知 $m_1=m_2$，即 A 的最小元是唯一的. ▌

推论 不存在这样的函数 $f:N\to N$，使得对于任意的自然数 n，均有 $f(n^{+})\in f(n)$.

证明 若存在这样的函数 $f:N\to N$，则 $\varnothing\neq \mathrm{ran}f\subseteq N$. 由 N 上的良序定理可知，$\mathrm{ran}f$ 有最小元，设 m 为它的最小元. 由于 $m\in \mathrm{ran}f$，故存在 $n\in N$，使得 $f(n)=m$. 可是由于 $f(n^{+})\in f(n)=m$ 且 $f(n^{+})\in \mathrm{ran}f$，这与 m 为 $\mathrm{ram}f$ 的最小元矛盾. ▌

定理 4.23（N **上的强归纳原则**） 设 A 为 N 的一个子集，对于任意的 $n\in N$，如果小于 n 的元素都属于 A，就有 $n\in A$，则 $A=N$.

证明 假设 $A\neq N$，则 $N-A\neq\varnothing$，由 N 上的良序定理可知 $N-A$ 有最小元，设它为 m. 于是比 m 小的元素都属于 A，由定理中的条件可知，$m\in A$，这与 $m\in N-A$ 矛盾. ▌

定理 4.23 是第二数学归纳法的理论基础.

用第二数学归纳法证明全体自然数都有性质 P 的步骤如下：

构造 N 的子集：

$$T=\{n\mid n\in N\wedge P(n)\}.$$

验证：(1) $0\in T$；

(2) 若小于等于 n 的自然数都属于 T，就有 $n^+\in T$.

则 $T=N$.

【例 4.8】 设 A 为一个集合，G 是一个函数，$f_1,f_2\in N\to A$，若对于任意的 $n\in N$，$f_1\upharpoonright n$，$f_2\upharpoonright n$ 都属于 $\mathrm{dom}G$，且 $f_1(n)=G(f_1\upharpoonright n)$，$f_2(n)=G(f_2\upharpoonright n)$，则 $f_1=f_2$.

证明 用第二数学归纳法证明. 设

$$T=\{n\mid n\in N\wedge f_1(n)=f_2(n)\}.$$

(1) 证 $0\in T$. $f_1(0)=G(f_1\upharpoonright 0)=G(\varnothing)=G(f_2\upharpoonright 0)=f_2(0)$，所以 $0\in T$.

(2) 设小于等于 n 的自然数都属于 T，要证 $n^+\in T$.

$f_1(n^+)=G(f_1\upharpoonright n^+)$，$f_2(n^+)=G(f_2\upharpoonright n^+)$，由假设知道 $f_1\upharpoonright n^+=f_2\upharpoonright n^+$. 而由于 G 为函数（单值的），所以，$f_1(n^+)=G(f_1\upharpoonright n^+)=G(f_2\upharpoonright n^+)=f_2(n^+)$，即得出 $f_1(n^+)=f_2(n^+)$，于是 $n^+\in T$，所以 $T=N$. ▌

习 题 四

1. 判断下列各集合是否为归纳集，并说明理由.

(1) $\{\varnothing,\varnothing^+,\varnothing^{++},\cdots\}\cup\{a,a^+,a^{++},\cdots\}$；

(2) $\{\{\varnothing\},\{\varnothing\}^+,\{\varnothing\}^{++},\cdots\}$；

(3) $\{\varnothing,\varnothing^+,\varnothing^{++},\cdots,\varnothing^{++\cdots+}\}$；

(4) $\{a,a^+,a^{++},\cdots\}$.

2. 计算

(1) $2\cup 3$；

(2) $2\cap 3$；

(3) $\bigcup 5$；

(4) $\bigcap 6$；

(5) $\bigcup\bigcup 7$.

3. 证明：除零以外的自然数都是某个自然的后继.

4. 证明：对于任意的自然数 m,n，均有 $m\in m+n^+$.

5. 设 A 是传递集，证明 A^+ 也是传递集.

6. 设 $\mathscr{A}$ 中每个元素都是传递集，证明

(1) $\bigcup\mathscr{A}$ 是传递集；

(2) 当 $\mathscr{A}\neq\varnothing$ 时，$\bigcap\mathscr{A}$ 也是传递集.

7. 设 $f:A\to A$ 是单射函数，$a\in A-\operatorname{ran}f$. 定义 $h:N\to A$，且 $h(0)=a$，$h(n^+)=f(h(n))$，证明 h 也是单射函数.

第五章 基 数

在前几章中，曾多次用到有穷集合、无穷集合等概念，并用 $|A|$ 表示过有穷集合 A 中的元素个数，本章中将给出有穷集合，无穷集合的定义，并讨论任何集合所含元素“个数”，即基数问题. 在第六章中将进一步讨论基数问题.

§5.1 集合的等势

本节中讨论两个集合有相同元素“个数”的问题.

定义 5.1 设 A、B 为两个集合，若存在从 A 到 B 的双射函数，则称 A 与 B 是等势的，记作 $A \approx B$.

【例 5.1】 设 $N_{偶} = \{n \mid n \in N \wedge n$ 为偶数$\}$，

$N_{奇} = \{n \mid n \in N \wedge n$ 为奇数$\}$，

$N_{2^n} = \{x \mid x = 2^n \wedge n \in N\}$，

则 $N \approx N_{偶}$，$N \approx N_{奇}$，$N \approx N_{2^n}$.

解 取 $f: N \to N_{偶}$，且 $\forall n \in N$，$f(n) = 2n$，

$g: N \to N_{奇}$，且 $\forall n \in N$，$g(n) = 2n + 1$，

$h: N \to N_{2^n}$，且 $\forall n \in N$，$h(n) = 2^n$，不难证明，f，g，h 都是双射函数，因而 $N \approx N_{偶}$，$N \approx N_{奇}$，$N \approx N_{2^n}$.

定理 5.1 (1) $Z \approx N$；

(2) $N \times N \approx N$；

(3) $N \approx Q$；

(4) $(0,1) \approx R$；

(5) $[0,1] \approx (0,1)$.

证明 (1) 取 $f: Z \to N$，且 $\forall n \in Z$，

$$f(n)=\begin{cases}0, & n=0,\\ 2n, & n>0,\\ 2|n|-1, & n<0.\end{cases}$$

易证 f 是 Z 到 N 的双射函数，所以 $Z\approx N$.

(2) 由例 3.6 可知 $N\times N\approx N$.

(3) 因为任何有理数都可表示成分数，因而，$\forall n\in N-\{0\}$，列出 $\frac{m}{n}$，$m\in Z$，见图 5.1. 从中找出全体既约分数，它们表示出了全体有理数，按图中所示的路线将自然数与全体有理数一一对应起来，即 $\forall n\in N$，$f(n)$ 为 $[n]$ 旁边的有理数，易知，f 是双射的，所以 $N\approx Q$.

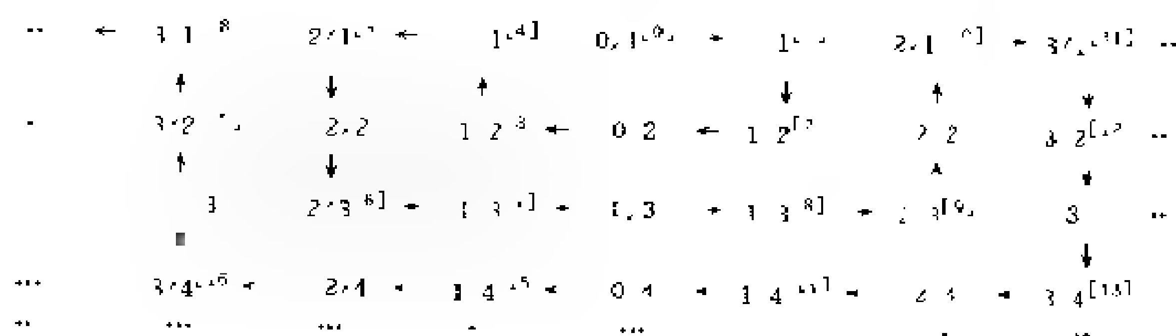


图 5.1

(4) $f:(0,1)\to R$，$\forall x\in(0,1)$，$f(x)=\mathrm{tg}\,\pi\left(\frac{2x-1}{2}\right)$，则 f 是 $(0,1)$ 到 R 的双射函数，所以 $(0,1)\approx R$.

(5) $f:[0,1]\to(0,1)$，$\forall x\in[0,1]$，

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & x=0,\\ \frac{1}{2}, & x=1,\\ \frac{1}{2^{n+2}}, & x=\frac{1}{2^n},n\geqslant 1,\\ x, & \text{其他}.\end{cases}$$

可让 f 是 $[0,1]$ 到 $(0,1)$ 的双射函数，因而 $[0,1]\approx(0,1)$. ▌

定理 5.2 设 A 为任意的集合，则 $P(A)\approx(A\to 2)$. 其中 $(A\to 2)$ 为 2^A，即 A 到 $2=\{0,1\}$ 的全体函数.

证明 取 $H:P(A)\to(A\to 2)$，$\forall B\in P(B)$，

$$H(B)=\chi_B:A\to\{0,1\}.$$

下面证明 H 是双射的.

(1) 证 H 是单射的，设 $B_1,B_2\in P(A)$ 且 $B_1\neq B_2$，则 $H(B_1)=\chi_{B_1}\neq\chi_{B_2}=H(B_2)$，所以 H 是单射的.

(2) 证明 H 是满射的，$\forall f\in(A\to 2)$，令

$$B=\{x\mid x\in A\land f(x)=1\}.$$

则 $B\subseteq A$，且 $H(B)=\chi_B=f$. 故 H 是满射的.

综上所述，H 是双射的，所以 $P(A)\approx(A\to 2)$. ▌

定理 5.3 设 A,B,C 为任意的集合，则

(1) $A\approx A$；

(2) 若 $A\approx B$，则 $B\approx A$；

(3) 若 $A\approx B$ 且 $B\approx C$，则 $A\approx C$.

本定理的证明留作习题.

由本定理及定理 5.1 可知，$N\approx Z$，$N\approx N\times N$，$Z\approx N\times N$，$Q\approx N$，$Q\approx N\times N$，$R\approx(0,1)$，$R\approx[0,1]$ 等.

定理 5.4（康托定理）

(1) $N\not\approx R$ ①；

(2) 设 A 为任意的集合，则 $A\not\approx P(A)$.

证明 (1) 由定理 5.3 可知，只要证明 $N\not\approx[0,1]$. 用反证法证明之. 否则，$N\approx[0,1]$，我们要推出矛盾. 由于设 $N\approx[0,1]$，因而存在双射函数 $f:N\to[0,1]$. $\forall n\in N$，记 $f(n)=x_{n+1}$，于是

$$\operatorname{ran} f=[0,1]=\{x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots\}$$

将 x_i 表示成如下形式的小数：

① $A\not\approx B$ 表示 A 与 B 不等势.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0.\,a_1^{(1)}\,a_2^{(1)}\,a_3^{(1)}\,\cdots \\
x_2 &= 0.\,a_1^{(2)}\,a_2^{(2)}\,a_3^{(2)}\,\cdots \\
x_3 &= 0.\,a_1^{(3)}\,a_2^{(3)}\,a_3^{(3)}\,\cdots \\
&\ \ \vdots \\
x_n &= 0.\,a_1^{(n)}\,a_2^{(n)}\,a_3^{(n)}\,\cdots \\
&\ \ \vdots
\end{aligned}
$$

其中，$0\leqslant a_i^{(j)}\leqslant 9$，$i=1,2,\cdots$，$j=1,2,\cdots$. 为了使表示法是唯一的，当小数点后第 r 位及以后各位全为 9 时，将这些 9 全变成 0，并在第 $r-1$ 位上加 1. 例如，当 $x=0.14999\cdots$ 时，将它记为 $x=0.15000\cdots$.

下面选一个 $[0,1]$ 中的小数 $x=0.b_1b_2b_3\cdots$，使 x 满足以下三个条件：

(1) $0\leqslant b_i\leqslant 9$，$i=1,2,\cdots$；

(2) $b_n\neq a_n^{(n)}$，$n=1,2,3,\cdots$.

(3) 同 x_i 一样，也注意 x 表示法的唯一性. 如此选出的小数是一个属于 $[0,1]$ 内的实数，但由 x 的构造可知，$x\notin\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$，这与 $[0,1]=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$ 相矛盾. 所以 $N\not\approx[0,1]$，于是 $N\not\approx R$.

(2) 设 A 为任意的集合，我们来证明 $A\not\approx P(A)$. 否则，存在双射函数 $f:A\to P(A)$. 令

$$B=\{x\mid x\in A\wedge x\notin f(x)\}.$$

则 $B\in P(A)$，于是存在 $y\in A$，使得 $f(y)=B$. 而 $B=\{x\mid x\in A\wedge x\notin f(x)\}$. 于是，若 $y\in B$，则 $y\notin f(y)=B$，若 $y\notin B$，则 $y\in f(y)=B$，矛盾. 所以 $A\not\approx P(A)$. ■

5.2 有穷集合与无穷集合

定义 5.2 一个集合 A 与某个自然数 n 等势，即 $A\approx n$，则

称 A 是**有穷集合**；否则，称 A 是**无穷集合**.

定理 5.5 不存在与自己的真子集等势的自然数.

证明 只要证明如下的命题：设 n 为一个自然数，$\forall f \in (n \to n)$ 且 f 是单射的，则 f 一定是满射的，即 $\mathrm{ran} f = n$. 用数学归纳法证明之. 设

$S = \{n \mid n \in N \land \forall f(f \in (n \to n) \land f$ 是单射的 $\to \mathrm{ran} f = n)\}$.

(1) 在 $(0 \to 0)$ 中只有 $\varnothing : \varnothing \to \varnothing$，而 $\varnothing : \varnothing \to \varnothing$ 为双射的，所以 $0 \in S$.

(2) 设 $n \in S$，下面证明 $n^+ \in S$.

设 $f : n^+ \to n^+$，且 f 为单射的，设 $f' = f \upharpoonright n : n \to n^+$，$f'$ 显然是单射的.

① n 在 f 的作用下是封闭的，即 $f \upharpoonright n \in (n \to n)$，于是由归纳假设 $n \in S$ 可知，$\mathrm{ran} f' = n$，由 f 的单射性可知，必有 $f(n) = n$，因而 $\mathrm{ran} f = \mathrm{ran} f' \cup \{n\} = n \cup \{n\} = n^+$，故 $n^+ \in S$.

② n 在 f 的作用下不封闭，即存在 $m \in n$，使得 $f(m) = n$，而 $f(n) \in n$，令 $\hat{f} \in (n^+ \to n^+)$，且

$$\hat{f} = \begin{cases} n, & x = n, \\ f(n), & x = m, \\ f(x), & x \neq n \land x \neq m. \end{cases}$$

则 n 在 $\hat{f}$ 作用下是封闭的，且 $\hat{f}$ 是单射的，由①可知，$\mathrm{ran} \hat{f} = n^+$，可是 $\mathrm{ran} f = \mathrm{ran} \hat{f} = n^+$，所以，$n^+ \in S$.

由以上的讨论可知 $S = N$. ∎

推论 1 不存在与自己的真子集等势的有穷集合.

证明 反证法. 若不然，必存在有穷集合 A 和 A 的真子集 B，使得 $A \approx B$，因而存在 $f : A \to B$ 且 f 是双射的. 由于 $B \subset A$，因而存在 $a \in A \land a \notin B = \mathrm{ran} f$.

另一方面，由于 A 是有穷集合，因而存在自然数 n，使得 $A \approx n$. 于是又存在 $g : A \to n$ 且是双射的，并且 $g^{-1} : n \to A$，而且 g^{-1} 也是双射的. 取 $h = (g \upharpoonright B) \circ f \circ g^{-1} = ((g \upharpoonright B) \circ f) \circ g^{-1}$，且 $\mathrm{dom} h$

n，并且 h 是单射的．可是，由于 $a\in B-\operatorname{ran}f$，所以，$g(a)\notin\operatorname{ran}((g\restriction B)\circ f)$．从而 $g(a)\notin\operatorname{ran}h$，但是 $g(a)\in n$，于是 $\operatorname{ran}h\subset n$，即 h 是 n 与 n 的真子集间的双射函数，这就导致了自然数 n 与自己的真子集等势，这矛盾于定理 5.5． ▌

推论 2 （1）任何与自己的真子集等势的集合都是无穷集．

（2）N 是无穷集．

证明 由推论 1 和例 5.1 本推论得证． ▌

推论 3 任何有穷集合都与唯一的自然数等势．

证明 设 A 为一个有穷集合，若存在自然数 n,m，使得 $A\approx n$ 且 $A\approx m$．由定理 5.3 可知 $n\approx m$．由 N 上的三歧性可知，对此 n 和 m，$m\in n$，$m=n$，$n\in m$ 三式成立且仅成立一式．若 $m\in n$，蕴涵 $m\subset n$，这说明 n 与自己的真子集 m 等势．这矛盾于定理 5.5．类似地，也不可能有 $n\in m$ 成立，因而只有 $m=n$． ▌

定理 5.6 任何有穷集合的子集仍为有穷集合．

为了证明定理 5.6，先给出一个引理，引理的证明留作习题（见习题五中 5.）．

引理 设 c 为自然数 n 的真子集，则 c 与某个属于 n 的自然数等势．

证明定理．设 A 为一个有穷集合，$B\subseteq A$．若 $B=A$，结论显然成立．下面设 $B\subset A$．由定理 5.5 的推论 3 可知，存在唯一的自然数 n，使得 $A\approx n$，因而存在双射函数

$$f:A\to n.$$

易知，

$$f\restriction B:B\to f(B)$$

也是双射函数．所以，$B\approx f(B)\subset n$．由引理可知，存在 $m\in n$，使得 $B\approx m$，因而 B 也是有穷集合． ▌

§5.3 基　　数

集合的基数或集合的势是集合论中基本的概念之一．在朴素的集合论体系中讨论基数的概念，只能从几条规定（或公理）出发．

在前几章中，对于有穷集合 A 来说，曾用 $|A|$ 表示 A 中的元素个数．设 A 为任意一个集合，现在规定用 $\mathrm{card}A$ 表示 A 中的元素"个数"，并称 $\mathrm{card}A$ 为集合 A 的基数，并再作以下 5 条规定．

（1）对于任意的集合 A 和 B，规定

$$\mathrm{card}A = \mathrm{card}B \text{ 当且仅当 } A \approx B.$$

（2）对于任意的有穷集合 A，规定与 A 等势的自然数 n 为 A 的基数，记作

$$\mathrm{card}A = n$$

（3）对于自然数集合 N，规定

$$\mathrm{card}N = \aleph_0 \quad \text{（读作阿列夫零）}[1].$$

（4）对于实数集合 R，规定

$$\mathrm{card}R = \aleph.$$

（5）将 $0,1,2,\cdots,\aleph_0,\aleph$ 都称作基数，其中，自然数 $0,1,2,\cdots$ 称作有穷基数，而 $\aleph_0,\aleph$ 称作无穷基数．并规定用希腊字母 κ,λ,μ 等表示任意的基数．

设集合 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{\{a\},\{b\},\{c\}\}$，$N_{偶}=\{n \mid n\in N \land n \text{ 为偶数}\}$，$N_{奇}=\{n \mid n\in N\land n \text{ 为奇数}\}$，按 5 条规定，则 $\mathrm{card}A=\mathrm{card}B=3$，$\mathrm{card}N_{偶}=\mathrm{card}N_{奇}=\mathrm{card}N=\aleph_0$，$\mathrm{card}[0,1]=\mathrm{card}(0,1)=\mathrm{card}R=\aleph$．

设 κ 为任意基数，令

$$K_\kappa=\{x \mid x \text{ 是集合且 } \mathrm{card}x=\kappa\}.$$

当 $\kappa=0$ 时，$K_\kappa=\{\varnothing\}$ 为一个集合，当 $\kappa\neq0$ 时，称 K_κ 为基数为 κ 的

[1] ℵ是希伯来语（即犹太语）字母中的第一个字母，读作阿列夫．

集合的类，而不称 K_κ 为集合①.

§5.4 基数的比较

定义 5.3 设 A,B 为任意二集合.

(1) 若存在 $f:A\to B$ 且 f 是单射的，则称 B **优势于** A，或称 A **劣势于** B，记作 $A\leqslant\cdot B$.

(2) 若 $A\leqslant\cdot B$ 且 $A\not\approx B$，则称 B **绝对优势于** A，或 A **绝对劣势于** B，记作 $A<\cdot B$.

定理 5.7 设 A,B 为二集合，则 $A\leqslant\cdot B$ 当且仅当存在 $C\subseteq B$，使得 $A\approx C$.

证明 必要性. 因为 $A\leqslant\cdot B$，所以存在单射函数 $f:A\to B$，令 $f:A\to \mathrm{ran}f$，则 f 是 A 到 $\mathrm{ran}f$ 的双射函数，所以 $A\approx\mathrm{ran}f$，于是取 $C=\mathrm{ran}f\subseteq B$ 即可.

充分性 设 $C\subseteq B$ 且 $A\approx C$，则存在双射函数 $g:A\to C$，取 $g:A\to B$，且 $\forall x\in A$，$g(x)=g(x)$，则 $\dot{g}$ 是 A 到 B 的单射，所以 $A\leqslant\cdot B$. ▌

推论 设 A,B 为二集合.

(1) 若 $A\subseteq B$，则 $A\leqslant\cdot B$；

(2) 若 $A\approx B$，则 $A\leqslant\cdot B$ 且 $B\leqslant\cdot A$.

证明简单.

定理 5.8 设 A,B,C 为三个集合.

(1) $A\leqslant\cdot A$；

(2) 若 $A\leqslant\cdot B$ 且 $B\leqslant\cdot C$，则 $A\leqslant\cdot C$.

证明留作习题.

定理 5.9 设 A,B,C,D 为 4 个集合，已知 $A\leqslant\cdot B$ 且 $C\leqslant\cdot D$，则

---

① $\kappa\neq 0$ 时，在 ZFC 公理系统中，可以证明 $K_\kappa(\kappa\neq 0)$ 不是集合.

(1) 若 $B\cap D=\varnothing$，则 $A\cup C\leqslant\cdot B\cup D$；

(2) $A\times C\leqslant\cdot B\times D$.

证明 (1) 由于 $A\leqslant\cdot B$ 且 $C\leqslant\cdot D$，所以存在单射函数 f，g，$f:A\to B$，$g:C\to D$，取 $h:A\cup C\to B\cup D$，且

$$h(x)=\begin{cases} f(x), & x\in A,\\ g(x), & x\in C-A,\end{cases}$$

容易证明 h 是单射的，所以 $A\cup C\leqslant\cdot B\cup D$.

(2) 取(1)中的单射函数 f,g，并取 $H:A\times C\to B\times D$，且对于任意的 $\langle x,y\rangle\in A\times C$，$h(\langle x,y\rangle)=\langle f(x),g(x)\rangle$，易证 h 是单射的，所以 $A\times C\leqslant\cdot B\times D$. ▌

定理 5.10 设 A、B、C、D 为 4 个集合，且已知 $\mathrm{card}A=\mathrm{card}C=\kappa$，$\mathrm{card}B=\mathrm{card}D=\lambda$，则

$$A\leqslant\cdot B \text{ 当且仅当 } C\leqslant\cdot D.$$

证明 由已知条件可知，$A\approx C$，$B\approx D$，从而存在 $f:A\to C$ 且为双射，$g:B\to D$ 且为双射.

必要性. 因为 $A\leqslant\cdot B$，所以存在单射函数 $h:A\to B$. 令 $j=(g\circ h)\circ f^{-1}$，则 $j:C\to D$. 由于 f^{-1}，h，g 全是单射的，根据定理 3.4，j 是单射的，所以 $C\leqslant\cdot D$.

类似可证充分性. ▌

根据定理 5.10 可以给出基数的次序的定义.

定义 5.4 设 κ，λ 为二基数，A，B 为二集合且 $\mathrm{card}A=\kappa$，$\mathrm{card}B=\lambda$，则规定：

(1) $\kappa\leqslant\lambda$ 当且仅当 $A\leqslant\cdot B$；

(2) $\kappa<\lambda$ 当且仅当 $A<\cdot B$.

【例 5.2】 设 κ、λ 为二基数，若 $\kappa\leqslant\lambda$，则存在集合 A 和 B，使得 $A\subseteq B$ 且 $\mathrm{card}A=\kappa$，$\mathrm{card}B=\lambda$.

证明 对于基数 κ、λ，存在集合 K、L，使得 $\mathrm{card}K=\kappa$，$\mathrm{card}L=\lambda$，由 $\kappa\leqslant\lambda$ 可知 $K\leqslant\cdot L$，于是存在 $f:K\to L$ 且 f 是单射的. 显然 f 是 K 到 $f(K)=\mathrm{ran}f$ 是双射的. 取 $A=\mathrm{ran}f$，则 $A\approx K$，取 $B=L$，

则 $A \subset B$，且 $\text{card}A = \text{card}K = \kappa$，$\text{card}B = \text{card}L = \lambda$。

【例 5.3】 (1) 设 κ 为任意一个基数，则 $0 \leqslant \kappa$；

(2) 设 n 为自然数，则 $n < \aleph_0$。

证明 (1) 对于 κ，存在集合 A，使得 $\text{card}A = \kappa$，又 $\varnothing : \varnothing \to A$ 且是单射的，所以，$\varnothing \preccurlyeq \cdot A \Rightarrow 0 \leqslant \kappa$。

(2) 由于 $n \subset N$ 且 $n \not\approx N$，可知 $n \prec \cdot N$，于是 $n = \text{card}n < \text{card}N = \aleph_0 \Rightarrow n < \aleph_0$。

【例 5.4】 设 m, n 为两个自然数，则

$$m \in n \text{ 当且仅当 } m < n.$$

证明留作习题。

定理 5.11 设 A 为任意一个集合，则

$$\text{card}A < \text{card}P(A).$$

证明 取 $f: A \to P(A)$，且 $\forall x \in A, f(x) = \{x\} \in P(A)$，易知 f 是单射的，所以 $A \preccurlyeq \cdot P(A)$，又由康托定理可知，$A \not\approx P(A)$，所以，$A \prec \cdot P(A)$，故有

$$\text{card}A < \text{card}P(A). \quad \blacksquare$$

【例 5.5】设 κ, λ, μ 为 3 个基数，则

(1) $\kappa \leqslant \kappa$；

(2) 若 $\kappa \leqslant \lambda$ 且 $\lambda \leqslant \mu$，则 $\kappa \leqslant \mu$。

本例是定理 5.8 的直接结果。

定理 5.12（Schroder Bernstein 定理）

(1) 设 A, B 为二集合，若 $A \preccurlyeq \cdot B$ 且 $B \preccurlyeq \cdot A$，则 $A \approx B$；

(2) 设 κ, λ 为二基数，若 $\kappa \leqslant \lambda$ 且 $\lambda \leqslant \kappa$，则 $\kappa = \lambda$。

证明 (1)由 $A \preccurlyeq \cdot B$ 且 $B \preccurlyeq \cdot A$ 可知，存在函数 f 和 g，$f: A \to B$ 且为单射的，$g: B \to A$ 也是单射的。若 $A - \text{ran}g = \varnothing$，则 g 是 B 到 A 的双射，因而 $A \approx B$。下面讨论 $A - \text{ran}g \neq \varnothing$ 的情况。

设 $C_0 = A - \text{ran}g$，$C_{n+1} = g(D_n)$，其中 $D_n = f(C_n)$，$n = 0, 1, 2, \cdots$

f, g 映射示意图为图 5.2 所示。

取 $h:A\to B$，且

$$h(x)=\begin{cases} f(x), & \exists n(n\in N\wedge x\in C_n),\\ g^{-1}(x), & 否则.\end{cases}$$

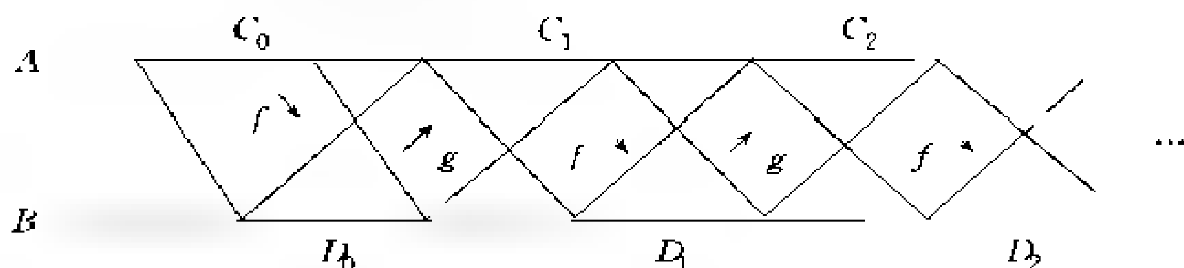


图 5.2

下面证明 h 是双射的.

(1) 证 h 是单射的，$\forall x_1,x_2\in A$ 且 $x_1\neq x_2$.

若 $\exists m,n$（m 可以等于 n），使得 $x_1\in C_m$，$x_2\in C_n$，由于 f 的单射性可知，$h(x_1)=f(x_1)\neq f(x_2)=h(x_2)$.

若 $\forall n\in N$，$x_1\notin C_n$ 且 $x_2\notin C_n$，则 $x_1,x_2\in \mathrm{ran}g$，由 g 的单射性可知，$h(x_1)=g^{-1}(x_1)\neq g^{-1}(x_2)=h(x_2)$.

若 $\exists n$，x_1 或 x_2 不妨设 $x_1\in C_n$，而对于任意 $m\in N$，$x_2\notin C_m$，这时，$h(x_1)=f(x_1)\in D_n$，而 $h(x_2)=g^{-1}(x_2)\notin D_n$，所以 $h(x_1)\neq h(x_2)$.

综上所述，h 是单射的.

(2) 证明 h 是满射的. 由 h 的构造可知，$\mathrm{ran}h\subseteq B$，下面证明 $B\subseteq\mathrm{ran}h$. 又因为

$$B=\bigcup\{D_n|n\in N\}\cup(B-\bigcup\{D_n|n\in N\}),$$

因而又只需证明 $\bigcup\{D_n|n\in N\}\subseteq\mathrm{ran}h$ 且 $(B-\bigcup\{D_n|n\in N\})\subseteq\mathrm{ran}h$.

因为 $D_n=f[C_n]=h[C_n]$，所以 $\bigcup\{D_n|n\in N\}\subseteq\mathrm{ran}h$. 又因为，$\forall y\in(B-\bigcup\{D_n|n\in N\})$，所以 $g(y)\notin C_n(n\in N)$. 于是，$h(g(y))=g^{-1}(g(y))=y$，这说明 $y\in\mathrm{ran}h$，所以 $(B-\bigcup\{D_n|n\in N\})\subseteq\mathrm{ran}h$. 这就证明了 h 是双射的，所以 $A\approx B$.

(2) 是(1)的直接结果. ∎

以下将 Schröder-Bernstein 定理简记作 S-B 定理.此定理对集合基数的比较及证明集合之间的等势起很大的作用.

【例5.6】 设 A,B,C 为三个集合,若 $A\subseteq B\subseteq C$,且 $A\approx C$,证明 $A\approx B\approx C$.

证明 由于 $A\subseteq B\subseteq C$ 且 $A\approx C$,由定理5.7的推论可知,$A\preccurlyeq\cdot B$ 且 $B\preccurlyeq\cdot A$,由 S-B 定理可知 $A\approx B$,又由定理5.3可知,$A\approx B\approx C$.

定理5.13 $R\approx(N\to 2)$,其中 $N\to 2=2^N$.

证明 由 S-B 定理,只需证明 $R\preccurlyeq\cdot(N\to 2)$ 且 $(N\to 2)\preccurlyeq\cdot R$.

(1) 先证 $R\preccurlyeq\cdot(N\to 2)$,又只需证明 $(0,1)\preccurlyeq\cdot(N\to 2)$.为此构造函数 $H:(0,1)\to(N\to 2)$.对于 $\forall z\in(0,1)$,z 表示二进制无限小数(注意表示法的唯一性),$H(z):N\to\{0,1\}$,且 $\forall n\in N$,取 $H(z)(n)$ 为 z 的第 $(n+1)$ 位小数.

例如,当 $z=0.101110011\cdots$ 时,则

$$H(z)(0)=1,H(z)(1)=0,H(z)(2)=1,H(z)(3)=1,$$
$$H(z)(4)=1,H(z)(5)=0,H(z)(6)=0,\cdots$$

显然当 $z_1\neq z_2$ 时,$H(z_1)\neq H(z_2)$,故 H 为单射,于是,$(0,1)\preccurlyeq\cdot(N\to 2)\Rightarrow R\preccurlyeq\cdot(N\to 2)$.

(2) 再证 $(N\to 2)\preccurlyeq\cdot R$,又只需证 $(N\to 2)\preccurlyeq\cdot[0,1]$.

$\forall f\in(N\to 2)$,则 f 的函数值确定一个 $\left[0,\frac{1}{9}\right]$ 区间上的实数,例如,$f(0),f(1),f(2),f(3),\cdots$ 依次为 $1,0,1,1,1,0,0,1,1,\cdots$ 时,取十进制小数 $y=0.101110011\cdots$,则 $0\le y\le\frac{1}{9}$.

易知 f 是单射的,所以 $(N\to 2)\preccurlyeq\cdot\left[0,\frac{1}{9}\right]\Rightarrow(N\to 2)\preccurlyeq\cdot R$.

由 S-B 定理可知 $R\approx(N\to 2)$,即 $R\approx 2^N$. ∎

【例5.7】 设 κ,λ,μ 为3个基数

(1) 若 $\kappa\le\lambda\le\mu$,则 $\kappa\le\mu$;

(2) 若 $\kappa<\lambda\le\mu$,则 $\kappa<\mu$.

证明 (1) $\kappa\leqslant\lambda<\mu\Longleftrightarrow\kappa\leqslant\lambda\leqslant\mu\wedge\lambda\neq\mu$，必有$\kappa\leqslant\mu$，但$\kappa\neq\mu$，否则$\kappa\leqslant\lambda\wedge\lambda\leqslant\mu\wedge\kappa=\mu\Rightarrow\kappa\leqslant\lambda\wedge\lambda\leqslant\kappa$，由S-B定理得$\mu=\kappa=\lambda$，这与$\lambda<\mu$矛盾.

类似可证明(2).

定理 5.14 (1) 设A为任意的无穷集合，则$N\preccurlyeq\cdot A$；

(2) 设κ为任意的无穷基数，则$\aleph_0\leqslant\kappa$.

本定理的证明要利用选择公理. 请参阅参考书目[1].

推论 1 设κ为任意的基数，$\kappa<\aleph_0$当且仅当κ是有穷基数.

证明 由定理5.14，必要性显然. 下面证充分性.

设κ为有穷基数，则存在自然数$n=\kappa$，而$n\in N$，于是$\kappa=n<\aleph_0$. ∎

推论 2 有穷集合的子集一定是有穷集合.

证明 设A为有穷集合，$B\subseteq A$，$\mathrm{card}A=\kappa$，$\mathrm{card}B=\lambda$，由推论1可知，$\kappa<\aleph_0$.

由于$B\subseteq A$和定理5.7的推论可知，$B\preccurlyeq\cdot A$，由定义5.4可知，$\lambda=\mathrm{card}B\leqslant\mathrm{card}A=\kappa$，于是$\lambda\leqslant\kappa<\aleph_0$. 由例5.7知，$\lambda<\aleph_0$，再由推论1可知，$B$为有穷集合. ∎

推论 3 设A是N的无穷子集，则$\mathrm{card}A=\aleph_0$.

证明 因为A是无穷集，由定理5.14知，$N\preccurlyeq\cdot A$. 又因为$A\subseteq N$，所以$A\preccurlyeq\cdot N$，由S-B定理可知，$A\approx N$，故$\mathrm{card}A=\aleph_0$. ∎

定义 5.5 设A为一集合，若$\mathrm{card}A\leqslant\aleph_0$，则称$A$为**可数集**或**可列集**.

由定理5.14可知，集合A是可数集当且仅当A是有穷集或$\mathrm{card}A=\aleph_0$(即$A\approx N$).

定理 5.15 集合A是无穷可数集当且仅当A可以写成如下形式：

$$\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}.$$

证明留作习题.

定理 5.16 可数集的子集是可数集.

证明 设 A 为任意的可数集，$B\subseteq A$. 由定理 5.7 的推论可知，$B\preccurlyeq\cdot A\preccurlyeq\cdot N$，于是 $\mathrm{card}B\leqslant\mathrm{card}A\leqslant\mathrm{card}N\Rightarrow\mathrm{card}B\leqslant\aleph_0$，所以 B 为可数集. ▌

定理 5.17 可数个可数集的并集是可数集.

证明 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 是可数集，又不妨设 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 全是无穷集(其他情况可类似证明). 由定理 5.15 可知，

$$
\begin{aligned}
A_1&=\{a_{11},a_{12},a_{13},\cdots,a_{1n},\cdots\},\\
A_2&=\{a_{21},a_{22},a_{23},\cdots,a_{2n},\cdots\},\\
A_3&=\{a_{31},a_{32},a_{33},\cdots,a_{3n},\cdots\},\\
&\vdots\\
A_n&=\{a_{n1},a_{n2},a_{n3},\cdots,a_{nn},\cdots\},\\
&\vdots\\
a_{ij}&\neq a_{ik}\ (j\neq k),\ i=1,2,\cdots.
\end{aligned}
$$

对于任意的 a_{ij}，称 $i+j$ 为 a_{ij} 的层次. 按各元素层次的大小排序，层次相同者按 i 的大小排序，并且规定，如果在排序中发现当前出现的元素与以前已经排好序的某元素相同，就将当前出现的元素删除，最后得

$$
\begin{aligned}
\bigcup A_i=\{&a_{11},a_{12},a_{21},a_{13},a_{22},a_{31},\cdots,\\
&a_{1n},a_{2,n-1},\cdots,a_{n1},\cdots\}.
\end{aligned}
$$

再由定理 5.15 可知，$\bigcup A_i$ 为可数集，且为无穷可数集. ▌

定理 5.18 设 A 为无穷集，则 $P(A)$ 不是可数集.

证明留作习题.

§5.5 基数运算

为了给出基数的加法、乘法、幂等运算的定义，必须先证下面的定理.

定理 5.19 设 K_1,K_2,L_1,L_2 为 4 个集合，若 $K_1\approx K_2,L_1\approx L_2$，则

(1) 如果 $K_1\cap L_1=K_2\cap L_2=\varnothing$，则 $K_1\cup L_1\approx K_2\cup L_2$；

(2) $K_1\times L_1\approx K_2\times L_2$；

(3) $L_1\to K_1\approx L_2\to K_2$.

证明 因为 $K_1\approx K_2, L_1\approx L_2$，所以存在双射函数 $f:K_1\to K_2$，$g:L_1\to L_2$.

(1) 令 $h:K_1\cup L_1\to K_2\cup L_2$，且

$$h(x)=\begin{cases} f(x), & x\in K_1,\\ g(x), & x\in L_1, \end{cases}$$

易证 h 是双射的，所以 $K_1\cup L_1\approx K_2\cup L_2$.

注意，若无 $K_1\cap L_1=K_2\cap L_2=\varnothing$ 的条件，结论不成立.

(2) 取 $h:K_1\times L_1\to K_2\times L_2$，且 $\forall <x,y>\in K_1\times L_1$，

$$h(<x,y>)=<f(x),g(y)>,$$

易证 h 是双射的，所以，$K_1\times L_1\approx K_2\times L_2$.

(3) 取 $H:(L_1\to K_1)\to(L_2\to K_2)$，且 $\forall h\in(L_1\to K_1)$，$H(h)=f\circ(h\circ g^{-1})$，见图 5.3 所示. 显然 $H(h)\in(L_2\to K_2)$，下面证明 H 是单射的. 设 $h_1,h_2\in(L_1\to K_1)$ 且 $h_1\neq h_2$，则存在 $l\in L_1$，使得 $h_1(l)\neq h_2(l)$，对此 $l\in L_1$，$g(l)\in L_2$，在 $g(l)$ 处计算 $H(h_1)$ 和 $H(h_2)$ 的值：

$$H(h_1)(g(l))=f\circ(h_1\circ g^{-1})(g(l))=f(h_1(l)),$$

而

$$H(h_2)(g(l))=f\circ(h_2\circ g^{-1})(g(l))=f(h_2(l)).$$

由 f 的单射性可知 $H(h_1)(g(l))\neq H(h_2)(g(l))$，于是，$H(h_1)\neq H(h_2)$，故 H 是单射的，所以，$(L_1\to K_1)\preccurlyeq\cdot(L_2\to K_2)$.

类似可证，$(L_2\to K_2)\preccurlyeq\cdot(L_1\to K_1)$，由 S-B 定理可知 $(L_1\to K_1)\approx(L_2\to K_2)$. ▌

注 在定理 5.19(3) 的证明中，也可以不用 S-B 定理，只要再证明 H 是满射的.

定义 5.6 设 κ,λ 为二基数.

(1) $\kappa+\lambda=\mathrm{card}(K\cup L)$，其中 K,L 是满足 $K\cap L=\varnothing$，而且

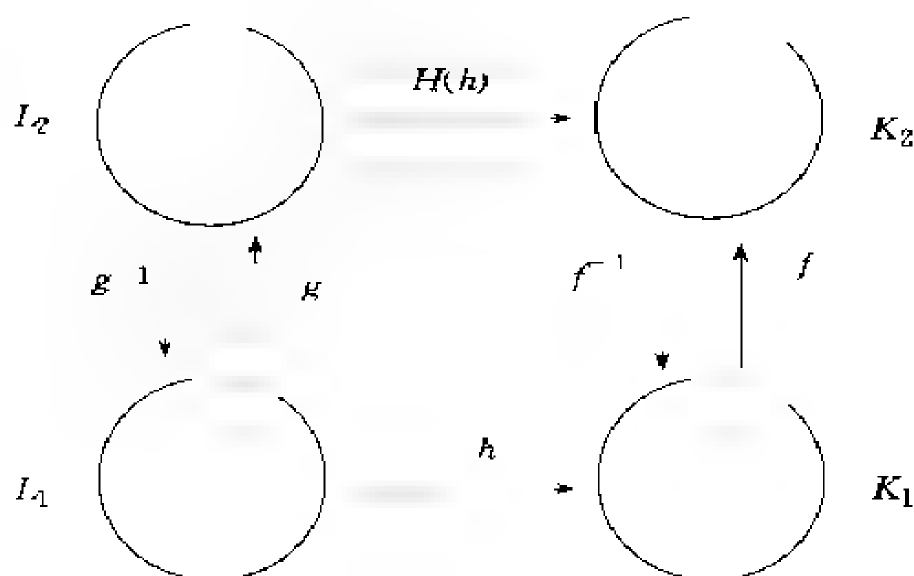


图 5.3

card$K=\kappa$,card$L=\lambda$的两个集合;

(2) $\kappa\cdot\lambda=\mathrm{card}(K\times L)$,其中$K$,$L$是满足card$K=\kappa$,card$L=\lambda$的两个集合;

(3) $\kappa^\lambda=\mathrm{card}(L\to K)$,其中$K$,$L$是满足card$K=\kappa$,card$L=\lambda$的两个集合.

对于任意的二基数κ,λ,在求它们的和、积、幂时,由定理5.19可知,可从K_κ,K_λ中任意选取集合,都不会影响运算结果.

【例5.8】 设0,1,2,3,4为基数,证明:

(1) $2+4=6$;

(2) $2\times3=6$;

(3) $3^2=9$;

(4) $0^0=1$.

证明 (1) 取$A=\{a,b\}$,$B=\{c,d,e,f\}$,但$A\cap B=\varnothing$,且card$A=2$,card$B=4$,$A\cup B=\{a,b,c,d,e,f\}\approx6$,所以,

$$2+4=\mathrm{card}(A\cup B)=6.$$

(2) 取$A=\{a,b\}$,$B=\{a,b,c\}$,则card$A=2$,card$B=3$,$A\times B\approx6$,所以,

$$2\times3=\mathrm{card}(A\times B)=6.$$

(3) 取 $A=\{1,2\}$，$B=\{a,b,c\}$，则 $\mathrm{card}A=2$，$\mathrm{card}B=3$，$A\to B\approx 9$. 所以，

$$3^2=\mathrm{card}(A\to B)=\mathrm{card}9=9.$$

(4) 取 $A=\varnothing$，$B=\varnothing$，则 $\mathrm{card}A=\mathrm{card}B=0$，$0^0=\mathrm{card}(\varnothing\to\varnothing)=\mathrm{card}\{\varnothing\}=1$.

【例 5.9】 设 n 为自然数(有穷基数)，则

(1) $n+\aleph_0=\aleph_0$;

(2) $n\cdot\aleph_0=\aleph_0$;

(3) $\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$;

(4) $\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0$.

证明留作习题.

【例 5.10】 设 κ 为任意一个基数，证明：

(1) $\kappa+0=\kappa$;

(2) $\kappa\cdot 0=0$;

(3) $\kappa\cdot 1=\kappa$;

(4) $\kappa^0=1$;

(5) $0^\kappa=0\ (\kappa\neq 0)$;

(6) $\kappa+\kappa=2\cdot\kappa$;

(7) $\kappa^1=\kappa$;

(8) $n+1=n^+$ (n 为有穷基数).

证明留作习题.

定理 5.20 (1) 设 A 为一集合，则

$$2^{\mathrm{card}A}=\mathrm{card}P(A);$$

(2) 设 κ 为一基数，则 $\kappa<2^\kappa$.

证明 (1) 由定理 5.2 知，$(A\to 2)\approx P(A)$，于是，$2^{\mathrm{card}A}=\mathrm{card}(A\to 2)=\mathrm{card}P(A)$.

(2) 设 $\mathrm{card}A=\kappa$，由定理 5.11 知 $\mathrm{card}A<\mathrm{card}P(A)$，又由(1)知 $\mathrm{card}P(A)=2^{\mathrm{card}A}$，于是，$\kappa=\mathrm{card}A<\mathrm{card}P(A)=2^{\mathrm{card}A}=2^\kappa\Rightarrow\kappa<2^\kappa$. ▌

推论 (1) $\mathrm{card}P(N)=2^{\aleph_0}$;

(2) $\mathrm{card}P(R)=2^{\aleph}$;

(3) $\aleph=2^{\aleph_0}$.

证明 只证(3)，由定理 5.13 知，$R\approx(N\to 2)$，所以，

$\aleph=\mathrm{card}R=\mathrm{card}(N\to 2)=2^{\aleph_0}\Rightarrow\aleph=2^{\aleph_0}$. ∎

由本定理及其推论可知

$\mathrm{card}P(N)=2^{\aleph_0}, \mathrm{card}PP(N)=2^{2^{\aleph_0}}, \cdots$

$\mathrm{card}P(R)=2^{\aleph}=2^{2^{\aleph_0}}, \mathrm{card}PP(R)=2^{2^{\aleph}}=2^{2^{2^{\aleph_0}}}, \cdots$

于是可得

$$0<1<2<\cdots<\aleph_0<2^{\aleph_0}<2^{2^{\aleph_0}}<\cdots$$

并且可知无最大基数存在.

下面讨论基数运算的性质.

定理 5.21 设 κ,λ,μ 是三个任意的基数，则

(1) $\kappa+\lambda=\lambda+\kappa, \kappa\cdot\lambda=\lambda\cdot\kappa$;

(2) $\kappa+(\lambda+\mu)=(\kappa+\lambda)+\mu,\ \kappa\cdot(\lambda\cdot\mu)=(\kappa\cdot\lambda)\cdot\mu$;

(3) $\kappa\cdot(\lambda+\mu)=\kappa\cdot\lambda+\kappa\cdot\mu$;

(4) $\kappa^{\lambda+\mu}=\kappa^{\lambda}\cdot\kappa^{\mu}$;

(5) $(\kappa\cdot\lambda)^{\mu}=\kappa^{\mu}\cdot\lambda^{\mu}$;

(6) $(\kappa^{\lambda})^{\mu}=\kappa^{\lambda\cdot\mu}$.

证明 取集合 K,L,M，使得 $\mathrm{card}K=\kappa, \mathrm{card}L=\lambda, \mathrm{card}M=\mu$，且满足 $K\cap L=K\cap M=L\cap M=\varnothing$. 于是本定理的证明等价于证明以下命题：

(1) $K\cup L\approx L\cap K, K\times L\approx L\times K$;

(2) $K\cup(L\cup M)\approx(K\cup L)\cup M, K\times(L\times M)\approx(K\times L)\times M$;

(3) $K\times(L\cup M)\approx(K\times L)\cup(K\times M)$;

(4) $((L\cup M)\to K)\approx(L\to K)\times(M\to K)$;

(5) $(M\to(K\times L))\approx(M\to K)\times(M\to L)$;

(6) $(M\to(L\to K))\approx(L\times M)\to K$.

证明 只证(4),(5),(6).

(4) 取 $H:((L\cup M)\to K)\to(L\to K)\times(M\to K)$，$\forall f\in((L\cup M)\to K)$，取 $H(f)=\langle f\upharpoonright L,f\upharpoonright M\rangle$，易知，$f\upharpoonright L\in(L\to K)$，$f\upharpoonright M\in(M\to K)$.

① 证明 H 是单射的.

对于任意的 $f_1,f_2\in((L\cup M)\to K)$，若 $f_1\neq f_2$，则 $f_1\upharpoonright L$ 与 $f_2\upharpoonright L$ 和 $f_1\upharpoonright M$ 与 $f_2\upharpoonright M$ 至少有一对是不同的，于是

$$H(f_1)=\langle f_1\upharpoonright L,f_1\upharpoonright M\rangle\neq\langle f_2\upharpoonright L,f_2\upharpoonright M\rangle=H(f_2),$$

所以，H 是单射的.

② 证明 H 是满射的.

对于任意的 $\langle g,h\rangle\in(L\to K)\times(M\to K)$，其中 $g\in(L\to K)$，$h\in(M\to K)$，取 $f=g\cup h$，由于 $L\cap M=\varnothing$，所以，$f\in((L\cup M)\to K)$，且 $f\upharpoonright L=g$，$f\upharpoonright M=h$，从而 $H(f)=\langle g,h\rangle$，由 $\langle g,h\rangle$ 的任意性，可知 H 是满射的.

由①，②可知 H 是双射的，所以(4)成立.

(5) 取 $H:(M\to K\times L)\to(M\to K)\times(M\to L)$，使得 $\forall f\in(M\to K\times L)$，$H(f)=\langle g,h\rangle$，其中，$g\in(M\to K)$，$h\in(M\to L)$，且满足，$\forall m\in M$，$f(m)=\langle k,l\rangle$ 时，$g(m)=k$，$h(m)=l$. 下面证明 H 是双射的.

① 证明 H 是单射的.

$\forall f_1$、$f_2\in(M\to(K\times L))$，$f_1\neq f_2$，由定义可知，g_1 与 g_2 和 h_1 与 h_2 中至少有一对是不同的，于是

$$H(f_1)=\langle g_1,h_1\rangle\neq\langle g_2,h_2\rangle=H(f_2),$$

所以 H 是单射的.

② 证明 H 是满射的.

对于 $\forall\langle g,h\rangle\in(M\to K)\to(M\to L)$，取 $f:M\to K\times L$，使得对于 $\forall m\in M$，$f(m)=\langle g(m),h(m)\rangle$，则 $H(f)=\langle g,h\rangle$，所以 H 是满射的.

综上所述，H 是双射的，所以

$$M \to (K \times L) \approx (M \to K) \times (M \to L).$$

(6) 取 $H:(M \to (L \to K)) \to ((L \times M) \to K)$，使得对于 $\forall\, f \in (M \to (L \to K))$，$H(f) \in ((L \times M) \to K)$，并满足，$\forall <l,m> \in L \times M$，$H(f)(<l,m>) = f(m)(l)$，可以证明 H 是双射的.

① $\forall\, f_1, f_2 \in (M \to (L \to K))$ 且 $f_1 \neq f_2$，则 $\exists\, m \in M$，使得 $f_1(m) \neq f_2(m)$，进而存在 $l \in L$，使得 $f_1(m)(l) \neq f_2(m)(l)$，而 $<l,m> \in L \times M$，于是，

$$H(f_1)(<l,m>) = f_1(m)(l) \neq f_2(m)(l) = H(f_2)(<l,m>),$$

所以 H 是单射的.

② 对于任意的 $g \in (L \times M \to K)$，取 $f \in (M \to (L \to K))$，使得，$\forall\, m \in M$，$\forall\, l \in L$，$f(m)(l) = g(<l,m>)$，于是，

$$H(f)(<l,m>) = f(m)(l) = g(<l,m>),$$

于是 $H(f) = g$，故 H 是满射的.

由①，②可知 H 是双射的，所以

$$(M \to (L \to K)) \approx ((L \times M) \to K). \quad \blacksquare$$

推论 设 κ, λ 为任意二基数，则

(1) $\kappa + (\lambda + 1) = (\kappa + \lambda) + 1$；

(2) $\kappa \cdot (\lambda + 1) = \kappa \cdot \lambda + \kappa$；

(3) $\kappa^{\lambda+1} = \kappa^{\lambda} \cdot \kappa$.

由定理 5.21 和例 5.10 本推论得证.

定理 5.22 设 κ, λ, μ 为三个基数，若 $\kappa \leqslant \lambda$，则

(1) $\kappa + \mu \leqslant \lambda + \mu$；

(2) $\kappa \cdot \mu \leqslant \lambda \cdot \mu$；

(3) $\kappa^{\mu} \leqslant \lambda^{\mu}$；

(4) $\mu^{\kappa} \leqslant \mu^{\lambda}$，$\kappa, \lambda$ 不同时为 0.

证明 (1) 取集合 A, B, C，使得 $A \subset B$，$B \cap C = \varnothing$，且 $\mathrm{card}A = \kappa$，$\mathrm{card}B = \lambda$，$\mathrm{card}C = \mu$，则 $\kappa \leqslant \lambda$，且 $A \cup C \subset B \cup C \Rightarrow A \cup C \preccurlyeq \cdot B$

$\cup C$，因而，

$$\kappa+\mu=\mathrm{card}(A\cup C)\le\mathrm{card}(B\cup C)=\lambda+\mu.$$

(2) 取集合 A,B,C，且 $A\subseteq B$，$\mathrm{card}A=\kappa$，$\mathrm{card}B=\lambda$，$\mathrm{card}C=\mu$，易知，

$$A\times C\subseteq B\times C\Rightarrow A\times C\preccurlyeq\cdot B\times C,$$

于是

$$k\cdot\mu=\mathrm{card}(A\times C)\le\mathrm{card}(B\times C)=\lambda\cdot\mu.$$

(3) 取集合 A,B,C，$A\subseteq B$，且 $\mathrm{card}A=\kappa$，$\mathrm{card}B=\lambda$，$\mathrm{card}C=\mu$. 首先证明 $(C\to A)\preccurlyeq\cdot(C\to B)$. 由于 $A\subseteq B$，所以，$\forall f\in(C\to A)\Rightarrow f\in(C\to B)$. 取 $H:(C\to A)\to(C\to B)$，且 $\forall f\in C\to A$，$H(f)=f$，显然 H 是单射的，所以 $(C\to A)\preccurlyeq\cdot(C\to B)$. 于是，

$$\kappa^\mu=\mathrm{card}(C\to A)\le\mathrm{card}(C\to B)=\lambda^\mu.$$

(4) 取集合 A,B,C，$A\subseteq B$，且 $\mathrm{card}A=\kappa$，$\mathrm{card}B=\lambda$，$\mathrm{card}C=\mu$，则 $\kappa\le\lambda$ 只要证明 $(A\to C)\preccurlyeq\cdot(B\to C)$.

① 当 $\mu=0$ 时，$C=\varnothing$，但此时 $\kappa\ne0$，于是 $A\ne\varnothing$，此时又有 $A\to C=\varnothing$，于是

$$\mu^\kappa=\mathrm{card}(A\to C)=\mathrm{card}\varnothing=0\le\mathrm{card}(B\to C)=\mu^\lambda.$$

② $\mu\ne0$，此时 $C\ne\varnothing$，$\exists c\in C$.

取 $H:(A\to C)\to(B\to C)$，且 $\forall f\in(A\to C)$，$H(f)=f\cup((B-A)\times\{c\})=g$，则 $g\in(B\to C)$，易证，$\forall f_1,f_2\in(A\to C)$ 且 $f_1\ne f_2$，则 $g_1\ne g_2$，所以 H 是单射的，于是 $(A\to C)\preccurlyeq\cdot(B\to C)$.

$$\mu^\kappa=\mathrm{card}(A\to C)\le\mathrm{card}(B\to C)=\mu^\lambda.\ \blacksquare$$

【例 5.11】 证明 $\aleph_0\cdot2^{\aleph_0}=2^{\aleph_0}$.

证明 $\mathrm{card}N<\mathrm{card}P(N)=\mathrm{card}(N\to2)\Rightarrow\aleph_0<2^{\aleph_0}$.

又 $1<\aleph_0$，由定义 5.22 可知

$$2^{\aleph_0}=1\cdot2^{\aleph_0}\le\aleph_0\cdot2^{\aleph_0}\le2^{\aleph_0}\cdot2^{\aleph_0}=2^{\aleph_0+\aleph_0}=2^{\aleph_0}.$$

于是，$\aleph_0\cdot2^{\aleph_0}=2^{\aleph_0}$.

定理 5.23 设 κ 为任意的无穷基数，则

$$\kappa\cdot\kappa=\kappa.$$

证明请见参考书目[1].

定理 5.24 设 κ,λ 为二基数,其中较大的为无穷基数,较小的不为 0,则

$$\kappa+\lambda=\kappa\cdot\lambda=\max\{\kappa,\lambda\}.$$

证明 不妨设 $\kappa\leqslant\lambda$,于是只要证明

$$\kappa+\lambda=\kappa\cdot\lambda=\lambda.$$

(1) 由定理 5.22、定理 5.24 及例 5.10 可知

$\lambda=\lambda+0\leqslant\lambda+\kappa\leqslant\lambda+\lambda=2\cdot\lambda\leqslant\lambda\cdot\lambda=\lambda$

$\Rightarrow\lambda+\kappa=\lambda.$

(2) 由于 $\kappa\neq 0$,可得

$\lambda=\lambda\cdot 1\leqslant\lambda\cdot\kappa\leqslant\lambda\cdot\lambda=\lambda$

$\Rightarrow\lambda\cdot\kappa=\lambda.$ ∎

推论 设 κ 为一无穷基数,

$$\kappa+\kappa=\kappa\cdot\kappa=\kappa.$$

定理 5.25 设 κ 为无穷基数,则

$$\kappa^\kappa=2^\kappa.$$

证明 因为 $\kappa<2^\kappa$,所以

$\kappa^\kappa\leqslant(2^\kappa)^\kappa=2^{\kappa\cdot\kappa}=2^\kappa\leqslant\kappa^\kappa,$

$\Rightarrow\kappa^\kappa=2^\kappa.$ ∎

最后还应指出,应用选择公理的一种等价形式(基数的可比较性)可以证明基数的三歧性,即对于任何二基数 κ,λ,$\kappa<\lambda$,$\kappa=\lambda$,$\lambda<\kappa$ 成立且只成立其一.

习 题 五

1. 设 A 为非空集合,$\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 分别为 A 上的全体偏序关系和全体拟序关系集合,证明 $\mathscr{A}\approx\mathscr{B}$.

2. 设集合 $A\neq\varnothing$,在 $(A\to A)$ 上定义二元关系 R 如下:

$$R=\{<f,g>\mid f,g\in(A\to A)\wedge \mathrm{ran}f=\mathrm{ran}g\}$$

(1) 证明 R 是 $A\to A$ 上的等价关系；

(2) 商集 $(A\to A)/R\approx P(A)-\{\varnothing\}$.

3. 设 a,b 为任意二实数，且 $a<b$，证明 $[0,1]\approx[a,b]\approx R$.

4. 证明定理 5.3，即证明等势关系具有自反性、对称性和传递性.

5. 设 c 为某个自然数 n 的真子集，则 c 与属于 n 的某个自然数等势.

6. 证明定理 5.8.

7. 证明定理 5.15.

8. 证明：$n(n\geqslant2)$ 个可数集之并为可数集.

9. 证明：$n(n\geqslant2)$ 个可数集的卡氏积是可数集.

10. 证明定理 5.18.

11. 设 $A=\{n\mid n\in N\wedge n\neq0\}$，$B=\{n^{10}\mid n\in N\wedge n\neq0\}$，求：

(1) $\mathrm{card}A$；

(2) $\mathrm{card}B$；

(3) $\mathrm{card}(A\cup B)$；

(4) $\mathrm{card}(A\cap B)$.

12. 设 A,B 为二集合，证明：如果 $A\approx B$，则 $\mathrm{card}P(A)=\mathrm{card}P(B)$.

13. 证明例 5.9.

14. 证明例 5.10.

*第六章　序　　数

序数是集合论中又一个重要的概念，学习过函数及其性质之后，已经具备了学习序数的条件.

§6.1　关于序关系的进一步讨论

在第二章中，已经给出了偏序关系、拟序关系等概念，特别是给出了良序关系及其良序集的概念.

在继续讨论之前，先给出良序关系的一种直观的描述是有益的. 设$<A,\prec>$为一个良序集，则A关于良序关系$\prec$有一个最小元，记为t_0，若A的子集$A-\{t_0\}\neq\varnothing$，则它又有最小元，记为t_1，再考虑A的子集$A-\{t_0,t_1\}$，若它非空，又得到最小元t_2，继续这一过程，得

$$t_0\prec t_1\prec t_2\prec\cdots.$$

若$A-\{t_0,t_1,\cdots\}\neq\varnothing$，还得到它的最小元，记为$t_N$，直到用完$A$中全体元素为止，将$A$中元素排成如下形式：

$$t_0\prec t_1\prec t_2\cdots\prec t_N\prec t_{N+1}\prec\cdots,$$

这就是良序集的直观描述.

下面定理进一步描述良序集的性质.

定理 6.1　设$<A,\prec>$为拟序集，$\prec$为$A\neq\varnothing$上的良序关系当且仅当不存在函数$f:N\to A$，使得对于任意的$n\in N$，有$f(n^+)\prec f(n)$.

证明　必要性. 否则，存在函数$f:N\to A$，对任意$n\in N$，均有$f(n^+)\prec f(n)$，任意$x\in\mathrm{ran}f\subset A$，存在$n\in N$，使得$x=f(n)$，而此时有$f(n^+)\prec f(n)=x$，于是$x$不是$\mathrm{ran}f$的最小元，由$x$的任意

件可知 $\operatorname{ran} f\subseteq A$ 无最小元,这与 $\prec$ 为 A 上的良序关系相矛盾.

充分性. 若 $\prec$ 不是 A 上的良序关系,必存在非空集合 $B\subseteq A$,B 中无关于 $\prec$ 的最小元. 因而任取 $b_0\in B$,则 b_0 不是 B 的最小元,因而存在 $b_1\in B$,使得 $b_1\prec b_0$,同样,存在 $b_2\in B$,使得 $b_2\prec b_1$,继续这个过程,令

$$R=\{\langle n,b_n\rangle \mid n\in N\wedge b_n\in B\wedge b_{n^+}\prec b_n\}.$$

显然有 $\operatorname{dom}R=N$ 且 $\operatorname{ran}R\subseteq B$,由选择公理的第一种形式(见第三章注解),必存在函数 $f\subseteq R$ 且 $\operatorname{dom} f=\operatorname{dom}R=N$,$\operatorname{ran} f\subseteq B$,又对于任意的 $n\in N$,$f(n^+)\prec f(n)$,这与已知条件是矛盾的. ▌

定义 6.1 设 $\langle A,\prec\rangle$ 为一个拟序集,称 $\operatorname{seg}t=\{x\mid x\in A\wedge x\prec t\}$ 为 t 的前节.

例如,在拟序集 $\langle R,<\rangle$ 上,R 为实数集,$<$ 为小于关系,$\operatorname{seg}0=(-\infty,0)$,$\operatorname{seg}1=(-\infty,1)$,$\operatorname{seg}\frac{1}{2}=(-\infty,\frac{1}{2})\cdots$

在良序集 $\langle N,<\rangle$ 上,任意的 $n\in N$,$\operatorname{seg}n=\{x\mid x\in N\wedge x<n\}=n$.

定义 6.2 设 $\langle A,\prec_1\rangle$,$\langle B,\prec_2\rangle$ 为两个拟序集,若存在双射函数 $f:A\to B$,满足如下条件,对于任意的 $x\in A$,$y\in A$,$x\prec_1 y$ 当且仅当 $f(x)\prec_2 f(y)$,则称 $\langle A,\prec_1\rangle$,$\langle B,\prec_2\rangle$ 为同构的,记作 $\langle A,\prec_1\rangle\cong\langle B,\prec_2\rangle$,并称 f 是 $\langle A,\prec_1\rangle$ 到 $\langle B,\prec_2\rangle$ 上的同构,也称

$$\text{“}x\prec_1 y\Leftrightarrow f(x)\prec_2 f(y)\text{”}$$

为保序性.

例如,良序集 $\langle\{1,3,5\},<\rangle$ 与 $\langle\{0,1,2\},\subset\rangle$ 是同构的,其实,取 f 如下:

$f:\{1,3,5\}\to\{0,1,2\}$,且

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=1,\\ 1, & x=3,\\ 2, & x=5,\end{cases}$$

易知 f 是 $<\{1,3,5\}>, <>$ 到 $<\{0,1,2\}, \subset>$ 的同构.

拟序集之间的同构关系具有自反性、对称性的传递性. 请见下面定理

定理 6.2 设 $<A, \prec_1>, <B, \prec_2>, <C, \prec_3>$ 为三个拟序集,则

(1) $<A, \prec_1> \cong <A, \prec_1>$;

(2) 若 $<A, \prec_1> \cong <B, \prec_2>$,则 $<B, \prec_2> \cong <A, \prec_1>$;

(3) 若 $<A, \prec_1> \cong <B, \prec_2>$ 且 $<B, \prec_2> \cong <C, \prec_3>$ 则 $<A, \prec_1> \cong <C, \prec_3>$.

证明 (1) 取 $f = I_A$,则易知 f 是 $<A, \prec_1>$ 到 $<A, \prec_1>$ 的同构,因而 $<A, \prec_1> \cong <A, \prec_1>$.

(2) 设 f 是 $<A, \prec_1>$ 到 $<B, \prec_2>$ 的同构,取 $g = f^{-1}$,容易证明 g 是 $<B, \prec_2>$ 到 $<A, \prec_1>$ 的同构.

(3) 设 f 为 $<A, \prec_1>$ 到 $<B, \prec_2>$ 的同构, g 为 $<B, \prec_2>$ 到 $<C, \prec_3>$ 的同构. 取 $h = g \circ f$,易知 $h: A \to C$ 且为双射. 并且对于任意的 $x, y \in A$,若 $x \prec_1 y$,则 $f(x) \prec_2 f(y)$,对 $f(x)$ 和 $f(y)$,有 $g(f(x)) \prec_3 g(f(y))$,而 $g(f(x)) = g \circ f(x) = h(x)$, $g(f(y)) = g \circ f(y) = h(y)$,于是 $h(x) \prec_3 h(y)$,故 h 是保序的,所以, h 是 $<A, \prec_1>$ 到 $<C, \prec_3>$ 的同构. ▌

定理 6.3 设 $f: A \to B$ 且为单射, $\prec_B$ 为 B 上的拟序关系,在 A 上定义关系 $\prec_A$ 如下,对于任意的 $x, y \in A$, $x \prec_A y \Leftrightarrow f(x) \prec_B f(y)$,则

(1) $\prec_A$ 为 A 上的拟序关系;

(2) 若 $\prec_B$ 为 B 上的拟线序(拟全序)关系,则 $\prec_A$ 为 A 上的拟线序关系;

(3) 若 $\prec_B$ 为 B 上的良序关系,则 $\prec_A$ 为 A 上的良序关系;

证明 (1) 只要证明 $\prec_A$ 具有反自反性和传递性.

对任意的 $x \in A$, $f(x) \in \mathrm{ran} f \subseteq B$,由于 $\prec_B$ 的反自反性,故 $\neg(f(x) \prec_B f(x))$,由 $\prec_A$ 的定义可知, $\neg(x \prec_A x)$,由 x 的任意性

可知，$\prec_A$ 是反自反的.

② 对于任意的 $x,y,z\in A$.

$x\prec_A y \wedge y\prec_A z$

$\Rightarrow f(x)\prec_B f(y)\wedge f(y)\prec_B f(z)$

$\Rightarrow f(x)\prec_B f(z)$ （因为 $\prec_B$ 是传递的）

$\Rightarrow x\prec_A z$，

于是 $\prec_A$ 是传递的.

(2) 由(1)已知 $\prec_A$ 是 A 上的拟序关系，因而只需证明 $\prec_A$ 具有三歧性. 其实，由 $\prec_B$ 满足三歧性，及 $\prec_A$ 的定义易知 $\prec_A$ 也满足三歧性，因而 $\prec_A$ 是 A 上的拟线序关系.

(3) 由(2)只需证明 A 的任意非空子集都有最小元.

设 $C\subseteq A$ 且 $C\neq\varnothing$，则 $f(C)\subseteq B$ 且 $f(C)\neq\varnothing$，由于 $\prec_B$ 为 B 上的良序关系，故 $f(C)$ 存在关于 $\prec_B$ 的最小元，设为 b_0，因而存在 $a_0\in C$，使得 $f(a_0)=b_0$，则 a_0 为 C 的最小元. 否则，存在 $a\in C$，使得 $a\prec_A a_0$，由定义可知，$f(a)\prec_B f(a_0)$，这与 $f(a_0)=b_0$ 为 $f(C)$ 的最小元矛盾.

推论 设 $<A,\prec_A>$，$<B,\prec_B>$ 为两个拟序集，且 $<A,\prec_A>\cong<B,\prec_B>$，则

(1) 若其中之一为拟线序集，则另一个也为拟线序集；

(2) 若其中之一为良序集，则另一个也为良序集.

证明 设 f 为 $<A,\prec_A>$ 与 $<B,\prec_B>$ 之间的同构，则 $\forall x,y\in A$，$x\prec_A y\Leftrightarrow f(x)\prec_B f(y)$，应用定理 5.3，本推论得证. ▌

定理 6.4 设 A,B 为二集合，且 $B\subseteq A$.

(1) 若 $\prec_A$ 为 A 上的拟序关系，则 $\prec_A\upharpoonright B$ 为 B 上的拟序关系；

(2) 若 $\prec_A$ 为 A 上的拟线序关系，则 $\prec_A\upharpoonright B$ 为 B 上的拟线序关系；

(3) 若 $\prec_A$ 为 A 上的良序关系，则 $\prec_A\upharpoonright B$ 为 B 上的良序关系；

证明 取 $f=I_B$，则 f 是 B 到 B 的双射函数，因而 f 是 B 到 A 的单射函数，并且 $\forall x,y\in B$，

$$x \prec_A\upharpoonright B\, y \Leftrightarrow f(x) \prec_A f(y),$$

由定理 5.3，本定理得证. ▌

§6.2 超限递归定理

定义 6.3 设 $\prec$ 为集合 A 上的拟线序关系，$B\subseteq A$，若 $\forall t(t\in A\land \text{seg}\,t\subseteq B\to t\in B)$ 为真，则称 B 是 A 的关于 $\prec$ 的归纳子集.

定理 6.5(超限归纳原理) 设 $\prec$ 为 A 上的良序，B 是 A 关于 $\prec$ 的归纳子集，则 $B=A$.

证明 否则，必有 B 为 A 的真子集，则 $A-B\neq\varnothing$，由于 $\prec$ 为 A 上的良序，因而 $A-B$ 有最小元，设它为 m，而对于 $\forall y$，$y\in A\land y\prec m$，则 $y\in B$，于是，$\text{seg}\,m\subseteq B$，由于 B 是 A 的关于 $\prec$ 的归纳子集，于是 $m\in B$，这与 $m\in A-B$ 相矛盾. 从而 $B=A$. ▌

定理中的条件"$\prec$ 为 A 上的良序"是必要的，考虑拟线序集 $\langle R,\prec\rangle$，其中 $\prec$ 为小于关系，不难验证 $B=(-\infty,0]$ 是 R 关于 $\prec$ 的归纳子集，但 $B\neq A$.

定理 6.6 设 $\prec$ 为 A 上的拟线序，如果对于 A 上的任何关于 $\prec$ 的归纳子集都与 A 是相等的，则 $\prec$ 为 A 上的良序.

证明 只要证明 A 的任意的非空子集均有关于 $\prec$ 的最小元，设 C 为 A 的任一个子集，下面证明 C 为空集或有关于 $\prec$ 的最小元.

令

$$B=\{t\mid t\in A\land\forall x(x\in C\to t\prec x)\}$$

则 $B\subseteq A$ 且 $B\cap C=\varnothing$，B 是或不是 A 的关于 $\prec$ 的归纳子集，所以分以下两种情况讨论：

(1) B 不是 A 的归纳子集，即存在 $t_0\in A$，使得 $\text{seg}\,t_0\subseteq B$ 而 $t_0\notin B$. 下面证明 t_0 为 C 的最小元. 因为 $t_0\notin B$，因而必存在 $x_0\in C$，

使得 $x_0<t$，又因为 $C\cap \mathrm{seg}t=\varnothing$，于是 $x_0\notin \mathrm{seg}t=\{x\mid x\in B\wedge x<t\}$，因而 $x_0=t_0$，而对于任意的 $t<t_0$（即 $t\in \mathrm{seg}t_0$），都有 $t\notin C$，所以 t_0 为 C 的最小元.

(2) B 是 A 关于 $<$ 的归纳子集，由定理的条件可知 $B=A$，由 $B\cap C=\varnothing$ 可知 $A\cap C=\varnothing$，因为 $C\subseteq A$，故可知 $C=\varnothing$.

综上所述，C 不是空集就有关于 $<$ 的最小元，并且由 C 的任意性可知，$<$ 为 A 上的良序. ∎

为了给出序数的概念，下面需要给出超限递归定理模式，在这样的定理模式中，需要引入二元谓词公式 $\gamma(x,y)$（x 与 y 具有关系 γ），其中的 x 与 y 还可以由集合（含关系、函数等）来充当.

超限递归定理模式 对于任意的公式 $\gamma(x,y)$，下面所叙述的是一条定理：

设 $<$ 为集合 A 上的良序，若 $\forall f\exists!y\gamma(f,y)$ 成立，则存在唯一的一个以 A 为定义域的函数 F，$\forall t\in A$，$\gamma(F\restriction \mathrm{seg}t, F(t))$ 成立.

本定理模式的证明需要替换公理模式，这里不证.

由于 $\gamma(x,y)$ 的任意性，决定了超限递归定理模式可以构造出无穷多条定理来.

下面举例说明这条定理模式的应用.

为了应用这条定理模式，首先应给出 $\gamma(x,y)$ 来，以下面方式给出 $\gamma(x,y)$ 的一种形式：

设 A,B 为二集合，且 $<$ 为 A 上的良序，定义

$$(A\to B)_< = \{f\mid \text{对于某个 } t\in A,\ f:\mathrm{seg}t\to B\}$$

设 $G:(A\to B)_<\to B$，取 $\gamma(x,y)$ 为

$$y=\begin{cases} G(x), & x\in(A\to B)_<,\\ \varnothing, & \text{否则}.\end{cases}$$

这样取的 x 与 y 满足的关系 γ，使得 $\forall f\exists!y\gamma(f,y)$ 为真，根据超限递归定理模式，则存在唯一的函数 $F:A\to B$，使得 $\forall t\in A$，$F(t)=G(F\restriction \mathrm{seg}t)$.

应用这个结果，当取良序集 $\langle N,\in\rangle$ 时，$\mathrm{seg}n=\{x\mid x\in n$

n，于是

$$F(n)=G(F\upharpoonright n).$$

它的前几个值为

$F(0)=G(F\upharpoonright 0)=G(\varnothing)$，

$F(1)=G(F\upharpoonright 1)=G(\{<0,F(0)>\})$，

$F(2)=G(F\upharpoonright 2)=G(\{<0,F(0)>,<1,F(1)>\})$，

$F(3)=G(F\upharpoonright 3)=G(\{<0,F(0)>,<1,F(1)>,<2,F(2)>\})\cdots$

显然，对于给定的 G，F 就唯一确定了，称 F 是由 $\gamma(x,y)$ 所构造的.

在下面定理中，$\gamma(x,y)$ 又取到了另一种形式.

定理 6.7 设 $<A,<_A>$，$<B,<_B>$ 为两个良序集，则下面三种情况至少成立其一：

(1) $<A,<_A>\cong<B,<_B>$；

(2) $<A,<_A>\cong<\mathrm{seg}b,<_B^0>$，$b\in B$；

(3) $<\mathrm{seg}a,<_A^0>\cong<B,<_B>$，$a\in A$.

其中，$<_A^0$、$<_B^0$ 分别为 $<_A$ 在 $\mathrm{seg}a$ 上的限制和 $<_B$ 在 $\mathrm{seg}b$ 上的限制.

本定理说明，任何两个良序集，或者它们是同构的，或者一个与另一个的某个前节是同构的.

证明 在超限递归定理模式中，取 $\gamma(x,y)$ 为：

$$y=\begin{cases}(B-\mathrm{ran}x)\text{ 的最小元}, & \text{当 } B-\mathrm{ran}x\neq\varnothing,\\ e, & \text{当 } B-\mathrm{ran}x=\varnothing,\end{cases}$$

其中 e 为不属于 B 的固定元素.

对于此 $\gamma(x,y)$，显然 $\forall f\exists!y\gamma(f,y)$ 成立，又因为 $<_A$ 为 A 上的良序，根据超限递归定理模式，存在函数 F，且 $\mathrm{dom}F=A$，$\forall t\in A$，注意到 $\mathrm{ran}(F\upharpoonright\mathrm{seg}t)=F(\mathrm{seg}t)$，于是

$$F(t)=\begin{cases}(B-F(\mathrm{seg}t))\text{的最小元}, & \text{当 } B-F(\mathrm{seg}t)\neq\varnothing,\\ e, & \text{否则}.\end{cases}$$

下面分三种情况讨论：

情况一 $e\in \mathrm{ran}F$. 设 a 是 $A_e=\{t \mid t\in A \wedge F(t)=e\}$ 的最小元，下面证明 $F\restriction \mathrm{seg}a$ 是 $<\mathrm{seg}a,\prec_A^0>$ 与 $<B,\prec_B>$ 之间的同构. 首先记 $F^0=F\restriction \mathrm{seg}a$，则 $F^0:\mathrm{seg}a\to B$.

(i) 证 F^0 是双射函数：

ⓐ 因为 $F(a)=e$，故 $B-F(\mathrm{seg}a)=\varnothing$，于是，$\mathrm{ran}F^0=B$，因而 F^0 是满射的.

ⓑ $\forall x,y\in \mathrm{seg}a$，不妨设 $x\preccurlyeq_A y$，

$$\begin{aligned} x\preccurlyeq_A y &\Rightarrow F(\mathrm{seg}x)\subseteq F(\mathrm{seg}y)\\ &\Rightarrow B-F(\mathrm{seg}y)\subseteq B-F(\mathrm{seg}x)\\ &\Rightarrow F(x)\preccurlyeq_B F(y). \end{aligned}$$

而如果 $x\prec_A y$，因为 $F(x)\in F(\mathrm{seg}y)$，而 $F(y)\notin F(\mathrm{seg}y)$，于是 $F(x)\neq F(y)$，这又证明了 F^0 是单射的，从而 F^0 是双射的.

(ii) 证 F^0 是保序的. $\forall x,y\in A$，

$$x\prec_A y\prec_A a\Rightarrow F(x)\prec_B F(y)$$

是显然的.

反之，若 $F(x)\prec_B F(y)$，则 $x\notin A_a$，因而 $x\prec_A y$.

由(i)，(ii)可知，$<\mathrm{seg}a,\prec_A^0>\cong<B,\prec_B>$.

情况二 $\mathrm{ran}F=B$. 显然 F 是满射的，类似于情况一的证明，可证 F 是单射的，并且是保序的，从而 F 是 $<A,\prec_A>$ 与 $<B,\prec_B>$ 之间的同构，即 $<A,\prec_A>\cong<B,\prec_B>$.

情况三 $\mathrm{ran}F\subset B$. 设 b 是 $B-\mathrm{ran}F$ 的最小元，下面证明 $\mathrm{ran}F=\mathrm{seg}b$. 由于 b 的最小性，有 $\mathrm{seg}b\subseteq \mathrm{ran}F$. 反之，$\forall y\in \mathrm{ran}F$，$\exists x\in A$，使得 $y=F(x)$，即 y 是 $B-F(\mathrm{seg}x)$ 的最小元，从而 $y\prec_B b$，因而 $y\in \mathrm{seg}b$. 故 $\mathrm{ran}F\subseteq \mathrm{seg}b$. 类似于情况一、二的证明，可证明 F 是双射和保序的，故 $<A,\prec_A>\cong<\mathrm{seg}b,\prec_B^0>$. ∎

定理 6.7 揭示了任何两个良序集之间的关系，是很有用途的定理.

§6.3 序　　数

为了给出序数的定义，再一次使用超限递归定理模式，请看下面定理.

定理 6.8　设$<$为集合 A 上的良序，则唯一存在一个以 A 为定义域的函数 E，使得对于任意的 $t\in A$，$E(t)=\mathrm{ran}(E\upharpoonright \mathrm{seg}t)=\{E(x)\mid x<t\}$.

证明　在这里只需取二元谓词公式 $\gamma(x,y)$ 为 $y=\mathrm{ran}x$，这个公式对于 $\forall f\exists!y(y=\mathrm{ran}f)$ 是成立的，又因为$<$为 A 上的良序，由超限递归定理模式，可知，存在唯一的以 A 的定义域的函数 E，使得 $\forall t\in A$，$\gamma(E\upharpoonright \mathrm{seg}t, E(t))$ 成立，即

$$E(t)=ran(E\upharpoonright \mathrm{seg}t)=\{E(x)\mid x<t\}.\quad \blacksquare$$

由定理 6.8 中给出的函数，可以给出良序集的属于象的概念.

定义 6.4　设$\langle A,<\rangle$为良序集，E 为定理 6.8 中所定义的函数，令 $\alpha=\mathrm{ran}E$，则称 α 为良序集$\langle A,<\rangle$的$\in$象，并称 E 为前段值域函数.

【例 6.1】(1) 设良序集$\langle A,<\rangle$中，$A=\{a,b,c\}$，$a<b<c$；

(2) 良序集$\langle B,<\rangle$中，$B=\{1,3,5\}$，$<$为小于关系；

(3) 良序集$\langle C,<\rangle$中，$C=\{a,d,e,h\}$，且 $a<d<e<h$.

求以上 3 个良序集的$\in$-象 $\mathrm{ran}E$.

解　(1) $E(a)=\{E(x)\mid x<a\}=\varnothing$，

$E(b)=\{E(x)\mid x<b\}=\{E(a)\}=\{\varnothing\}$，

$E(c)=\{E(x)\mid x<c\}=\{E(a),E(b)\}=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$，

于是，$\langle A,<\rangle$的$\in$象

$$\alpha=\mathrm{ran}E=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}=\{0,1,2\}=3.$$

(2) $E(1)=\{E(x)\mid x<1\}=\varnothing$，

$E(3)=\{E(x)\mid x<3\}=\{E(1)\}=\{\varnothing\}$，

$E(5)=\{E(x)\mid x<5\}=\{E(1),E(3)\}=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$，

$\alpha = \text{ran}E = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} = \{0,1,2\} = 3.$

(3) $E(a) = \varnothing$,

$E(d) = \{E(a)\} = \{\varnothing\}$,

$E(e) = \{E(a), E(d)\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$,

$E(h) = \{E(a), E(d), E(e)\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$,

$\alpha = \text{ran}E = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\}$

$= \{0,1,2,3\} = 4$

下面研究前段值域函数 E 和 $\in$ 象的性质.

定理 6.9 设 $<A,<>$ 为良序集, E 为前段值域函数, α 是 $<A,<>$ 的 $\in$ 象, 则

(1) $\forall t \in A, E(t) \notin E(t)$;

(2) E 为 A 与 α 之间的双射函数;

(3) $\forall s,t \in A, s<t \Leftrightarrow E(s) \in E(t)$;

(4) $\alpha = \text{ran}E$ 是传递集.

证明 (1) 设 $B = \{t \mid t \in A \land E(t) \in E(t)\}$, 则 $B \subseteq A$, 只要证明 $B = \varnothing$ 即可, 否则存在 B 的最小元 t, 有 $E(t) \in E(t) = \{E(x) \mid x < t\}$, 于是存在 $s<t$ 且 $E(t) = E(s)$, 从而有 $E(s) \in E(s)$, 这说明 $s \in B$, 且 $s<t$, 这与 t 为 B 的最小元矛盾.

(2) 因为 $\alpha = \text{ran}E$, 故知道 E 是满射的. 下面证明 E 是单射的. $\forall s,t \in A$ 且 $s \neq t$, 不妨设 $s<t$, 则 $E(s) \in E(t)$, 由(1)知道, $E(t) \notin E(t)$, $E(s) \neq E(t)$, 故 E 是单射的, 从而 E 是双射的.

(3) $\forall s,t \in A, s<t \Rightarrow E(s) \in E(t)$ 是显然的. 反之, 若 $E(s) \in E(t)$, 则存在 $x<t$ 使得 $E(s) = E(x)$, 但由(2)可知 E 是单射的, 所以 $x = s$, 即 $s<t$.

(4) 若 $u \in E(t)$, 由 E 的定义可知, 存在 $x<t$, 使得 $u = E(x)$, 从而 $u \in \text{ran}E = \alpha$, 这说明 α 是传递集. ∎

在良序集 $<A,<>$ 的 α 上定义二元关系

$$\in_\alpha = \{<x,y> \mid x \in A \land y \in A \land x \in y\},$$

由定理 6.9 的(2),(3)可知 $<\alpha, \in_\alpha> \cong <A,<>$.

例 6.1(1)中和(2)中所定义的 ∈ 二元关系相同，均为 $\{<0,1>, <0,2>, <1,2>\}$，而(3)中，

$$\in_a = \{<0,1>, <0,2>, <0,3>, <1,2>, <1,3>, <2,3>\}.$$

定理 6.10 两个良序集是同构的当且仅当它们具有相同的 ∈ 象.

证明 设任意两个良序集 $<A_1, <_1>$ 和 $<A_2, <_2>$ 有相同的 ∈ 象 α，则 $<A_1, <_1> \cong <\alpha, \in_\alpha> \cong <A_2, <_2>$，因而 $<A_1, <_1> \cong <A_2, <_2>$.

反之，若 $<A_1, <_1> \cong <A_2, <_2>$，下面证明它们具有相同的 ∈ 象. 设 f 为 $<A_1, <_1>$ 与 $<A_2, <_2>$ 之间的同构，并设 E_1, E_2 分别为 $<A_1, <_1>$ 与 $<A_2, <_2>$ 的前段值域函数，它们的 ∈ 象分别为 α_1 和 α_2，则 E_1 是 $<A_1, <_1>$ 与 $<\alpha_1, \in_{\alpha_1}>$ 之间的同构，E_2 是 $<A_2, <_2>$ 与 $<\alpha_2, \in_{\alpha_2}>$ 之间的同构. 令 $B = \{s \mid s \in A_1 \land E_1(s) = E_2(f(s))\}$. 下面用超限归纳法证明 $B = A_1$. 由定理 6.5，只需证明 B 是 A_1 的归纳子集. $\forall s \in A_1$, $\mathrm{seg}\,s \subseteq B$，要证明 $s \in B$.

$$\begin{aligned} E_1(s) &= \{E_1(x) \mid x <_1 s\} \\ &= \{E_2(f(x)) \mid x <_1 s\} && (\mathrm{seg}\,s \subseteq B) \\ &= \{E_2(y) \mid y <_2 f(s)\} \\ & && (f \text{ 是} <A_1, <_1> \text{与} <A_2, <_2> \text{之间的同构}) \\ &= E_2(f(s)), \end{aligned}$$

所以 $s \in B$. 于是 B 是 A_1 关于 $<_1$ 的归纳子集，由超限归纳法原则可知，$B = A_1$. 因而，

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \mathrm{ran}E_1 = \{E_1(s) \mid s \in A_1\} = \{E_2(f(s)) \mid s \in A_1\} \\ &= \{E_2(t) \mid t \in A_2\} = \mathrm{ran}E_2 = \alpha_2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

定义 6.5 设 $<$ 为集合 A 上的良序，称良序集 $<A, <>$ 的 ∈ 象为 $<A, <>$ 的序数. 如果一个集合是某个良序集的序数，则称这个集合为**序数**.

在例 6.1 中，$<A, <>$ 的序数为 3，$<B, <>$ 的序数也为 3，而 $<C, <>$ 的序数为 4.

不难看出所有的自然数都是序数.

定理 6.11 同构的良序集具有相同的序数.

由定义 5.5 及定理 6.10,定理 5.11 得证.

【例 6.2】 给定下面 3 个拟线序集:

(1) $<A,\prec>$,$A=\{1,2,3,5,7,8\}$,$\prec$为小于关系;

(2) $<B,\prec>$,$B=\{2,3,6,12,24,36\}$,$\prec=\preccurlyeq-I_B$,其中$\preccurlyeq$为整除关系;

(3) $<C,\prec>$,$C=\{1,2,4,8,16,32\}$,$\prec$同(2).

判断它们中哪些是良序集,并求出良序集的序数.

解 易知,(1),(3)是良序集,并且(1)$\cong$(3),其实,取 $f:A\to C$,且

$$f(x)=\begin{cases}1, & x=1,\\ 2, & x=2,\\ 4, & x=3,\\ 8, & x=5,\\ 16, & x=7,\\ 32, & x=8.\end{cases}$$

容易验证 f 是双射且是保序的,因而 f 是(1)与(3)之间的同构,所以,(1)$\cong$(3).

容易求出(1)的$\in$象 $\alpha=\mathrm{ran}E=\{0,1,2,3,4,5\}=6$. 由定义 6.5 可知,(1) 的序数为 6. 由定理 6.11 知,(2) 的序数也为 6.

定义 6.6 设 A 为一个集合,设 A 上的二元关系$\in_A=\{<x,y>\mid x\in A\wedge y\in A\wedge x\in y\}$,若$\in_A$是 A 上的良序,则称 A 按属于关系是良序的.

【例 6.3】 判断下列集合中,哪些按属于关系是良序的,是良序的并求相应良序集的序数.

(1) $A=\{0,1,2,3,4\}$;

(2) $B=\{1,3,5,7,8\}$;

(3) $C=\{0,1,2,3,\{4\}\}$;

(4) $D=\{a,\{a\},\{a,\{a\}\}\}$;

(5) $E=\{a,b,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$.

解 (1) A 按属于关系是良序的,$<A,\in_A>$的序数为 5.

(2) B 按属于关系是良序的,且$<B,\in_B>$与$<A,\in_A>$同构,序数当然也是 5.

(3) C 按属于关系不是良序的,其实 C 按属于关系不是拟线序.

(4) D 按属于关系是良序的,$<D,\in_D>$的良数为 3.

(5) E 按属于关系不是良序的.

定理 6.12 设 α 按属于关系是良序的,并且 α 是传递集,则 α 是一个序数(即 α 是$<\alpha,\in_\alpha>$的$\in$象).

证明 因为$<\alpha,\in_\alpha>$为良序,由定理 6.8 可知,存在以 α 为定义域的前段值域函数 E,$\forall t\in\alpha$,$E(t)=E[\mathrm{seg}\,t]$,为了证明 α 是$<\alpha,\in_\alpha>$的序数,只需证明 E 是 α 上的恒等函数 I_α.

因为 α 是传递集,所以$\forall t\in\alpha$,若 $x\in t$,则 $x\in\alpha$,于是,$x\in t\Longleftrightarrow x\in_\alpha t$,于是 $\mathrm{seg}\,t=t$.

设 $B=\{x\mid x\in\alpha\wedge E(x)=x\}$,则 $B\subseteq\alpha$,又对于$\forall t\in\alpha$,若 $\mathrm{seg}\,t\subseteq B$,则 $E(t)=\{E(x)\mid x\in_\alpha t\}=\{x\mid x\in_\alpha t\}=\mathrm{seg}\,t=t$,所以 $t\in B$,于是 B 是 α 的关于$\in_\alpha$的归纳子集,由定理 6.5 可知,$B=\alpha$,这就证明了 E 是 α 上的恒等函数 I_α. ▌

定理 6.13 设 α,β,γ 为三个序数,则

(1) α 的元素为序数(即任何序数的元素还是序数,也即序数是传递集);

(2) $\alpha\notin\alpha$(反自反性);

(3) $\alpha\in\beta\wedge\beta\in\gamma$,则 $\alpha\in\gamma$(传递性);

(4) $\alpha\in\beta$,$\alpha=\beta$,$\beta\in\alpha$ 有且仅有一式成立(序数之间具有三歧性);

(5) 由序数构成的非空集,按属于关系有最小元.

证明 (1) 设 x 为 α 的任一元素,要证明 x 是序数,即证明存

在良序集以 x 为序数，因为 α 为序数，因而存在良序集 $<A,<>$ 以 α 为序数，设 E 是 $<A,<>$ 与 $<\alpha,\in_\alpha>$ 之间的同构，则存在 $t\in A$，使得 $x=E(t)$。下面证明 x 是 $<\operatorname{seg}t,<'>$ 的序数，其中 $<'$ 是 $<$ 在 $\operatorname{seg}t$ 上的限制，由定理 6.4 可知，$<'$ 是 $\operatorname{seg}t$ 上的良序，所以 $<\operatorname{seg}t,<'>$ 是良序集，其 $\in$ 象（序数）为 $E(\operatorname{seg}t)=E(t)=x$，这说明 x 是序数.

(2) 设 α 是良序集 $<A,<>$ 的序数，若 $\alpha\in\alpha$ 成立，必存在 $t\in A$，使得 $\alpha=E(t)$，于是有 $E(t)\in E(t)$ 成立，这与定理 6.9 的(1)矛盾，所以 $\alpha\notin\alpha$.

(3) 由定理 6.9(4)可知，γ 是传递集，所以由 $\alpha\in\beta\wedge\beta\in\gamma$，有 $\alpha\in\gamma$ 成立.

(4) 首先证明 $\alpha\in\beta$，$\alpha=\beta$，$\beta\in\alpha$ 中至多有一式成立. 若不然至少有两式同时成立：

$$\alpha\in\beta\wedge\beta=\alpha,$$
$$\alpha\in\beta\wedge\beta\in\alpha,$$
$$\alpha=\beta\wedge\beta\in\alpha,$$
$$\alpha\in\beta\wedge\alpha=\beta\wedge\beta\in\alpha.$$

以上各种情况都蕴涵 $\alpha\in\alpha$，这与(2)矛盾，所以至多有一式成立.

再证至少有一种情况成立，由定理 6.7 可知，对于 $<\alpha,\in_\alpha>$，$<\beta,\in_\beta>$ 来说至少有下面 3 种情况之一成立.

(i) $<\alpha,\in_\alpha>\cong<\beta,\in_\beta>$，由定理 6.10 和定理 6.12 知 $\alpha=\beta$.

(ii) $<\alpha,\in_\alpha>\cong<\operatorname{seg}\delta,\in'_\beta>$，这里 $\delta\in\beta$，由(1)知道 δ 是序数，$\operatorname{seg}\delta=\delta$，$\in'_\beta=\in_\delta$，由(i)知 $\alpha=\delta$，即 $\alpha\in\beta$.

(iii) $<\operatorname{seg}\lambda,\in'_\alpha>\cong<\beta,\in_\beta>$，类似于(ii)的证明，可得 $\beta\in\alpha$.

综上所述，$\alpha\in\beta$，$\alpha=\beta$，$\beta\in\alpha$ 有且仅有一式成立.

(5) 设 S 是由序数组成的非空集合，β 为 S 中任一元素，我们进行如下讨论：

(i) $\beta\cap S=\varnothing$，此时可断言，β 为 S 中的最小元. 因为 $\forall\alpha\in S\Rightarrow\alpha\notin\beta$ 由三歧性知，$\beta\underline{\in}\alpha$，由 α 的任意性可知，β 是 S 的最小元.

(ii) $\beta\cap S\neq\varnothing$，于是，$\beta\cap S$ 为 β 的非空子集，对 $\in_\beta$ 而言，$\beta\cap S$ 有最小元 μ，可以断言，μ 是 S 的最小元. $\forall\alpha\in S$，当 $\alpha\notin\beta$ 时，$\beta\underline{\in}\alpha\Rightarrow\beta\subseteq\alpha\Rightarrow\mu\in\alpha$，当 $\alpha\in\beta$ 时，$\alpha\in\beta\cap S$，故 $\mu\underline{\in}\alpha$，因而 μ 是 S 的最小元. ▌

定义 6.7 设 α,β 为两个序数，若 $\alpha\in\beta$，则称 α 小于 β，记作 $\alpha<\beta$，又称 β 大于 α，记作 $\beta>\alpha$.

定理 6.14 设 α,β 为任意两个序数，$\alpha<\beta$，$\alpha=\beta$，$\alpha>\beta$ 三式成立且仅成立一式.

由定理 6.13 的(4)，本定理得证.

定理 6.15 (1) 任何以序数为元素的传递集合是序数；

(2) 0 是序数；

(3) 若 α 是序数，则 $\alpha^+=\alpha\cup\{\alpha\}$ 为序数；

(4) 若集合 A 是以序数为元素的集合，则 $\bigcup A$ 是序数.

证明 (1) 设 S 是以序数为元素的传递集，由定理 6.12，只要证明 S 按属于关系是良序的. 即证 $\in_S=\{\langle x,y\rangle\mid x\in S\wedge y\in S\wedge x\in y\}$ 是 S 上的良序. 首先证明 $\in_S$ 是 S 上的拟线序.

① 由定理 6.13(2)知，$\forall\alpha\in S$，$\alpha\notin\alpha$，故 $\in_S$ 具有反自反性.

② 设 α,β,γ 为任意 3 个序数，且 $\alpha\in\beta$，$\beta\in\gamma$，由定理 6.13(3)知 $\alpha\in\gamma$，所以 $\in_S$ 上有传递性.

③ 又由定理 6.13(4)可知，对于任意的 α,β，$\alpha\in\beta$，$\alpha=\beta$，$\beta\in\alpha$ 成立且只成立一式.

由①，②，③可知 $\in_S$ 是 S 上的拟线序关系.

再证明 S 的任何非空子集均有最小元.

由定理 6.13(5)可知，S 的任何非空子集按属于关系均有最小元.

综上所述，$\in_S$ 是 S 上的良序.

(2) $\varnothing$是良序集$<\varnothing,\in_{\varnothing}> = <\varnothing,\varnothing>$的$\in$象,所以$\varnothing$是序数,即0是序数.

(3) 由定理6.13(1)可知,α中元素都是序数,所以$\alpha^{+}=\alpha\cup\{\alpha\}$中的元素都是序数,又因为$\alpha$是传递集(见定理6.9),所以$\alpha^{+}$是传递集.由本定理(1)可知$\alpha^{+}$是序数.

(4) $\cup A$的任何元素是某序数的元素,由定义6.13(1)可知,$\cup A$的元素都是序数.下面证明$\cup A$是传递集.

$\forall \delta\in\cup A$,则$\exists \alpha\in A$,使得$\delta\in\alpha\in A$.因为α为传递集,所以$\delta\subset\alpha\in A$,从而$\delta\subset\cup A$.这说明δ的元素都是$\cup A$的元素,故$\cup A$是传递集,由本定理(1)可知$\cup A$是序数. ▌

由以上几个定理,容易证明下面定理.

定理6.16 (1) 一切自然数都是序数;

(2) 自然数集合N是序数.当N作为序数时,将它记为ω,$\omega^{+},\omega^{++},\omega^{+++},\cdots$是序数.

(3) 设A是以序数为元素的集合,则$\cup A$为A的关于属于等于关系的最小上界.

(4) 设α为一序数,则α^{+}是大于α的最小序数.

(5) 任何序数都是比它小的所有序数组成的集合,即设α为序数,则$\alpha=\{x\mid x$是序数$\wedge x<\alpha\}$.

证明 (1) 由定理6.15(2)和(3)得证.

(2) 由(1)和定理6.15(1),(2)得证.

(3) 首先证明$\cup A$是A上包含关系的最小上界.$\forall \alpha\in A$,由广义并集定义可知$\alpha\subset\cup A$,所以$\cup A$是A上关系包含关系的上界.设B是A上包含关系的另一个上界,要证明$\cup A\subset B$.$\forall \beta\in\cup A$,则存在$\gamma\in A$,使得$\beta\in\gamma\subset B$,所以$\beta\in B$,这说明$\cup A$是A上关于包含关系的最小上界.

因为A是序数组成的集合,A上的包含关系与A上的属于等于关系是等价的:设α,β为两个序数,$\alpha\neq\beta$,不妨设$\alpha\in\beta$.因为β是传递集,所以$\alpha\in\beta\Rightarrow\alpha\subseteq\beta$.反之,若$\alpha\subset\beta$,则必有$\beta\notin\alpha\wedge\beta\neq\alpha$,

由三歧性可知 $\alpha\in\beta$. 于是, $\alpha\in\beta\Longleftrightarrow\alpha\subsetneq\beta$.

综上所述, $\bigcup A$ 是 A 上属于等于关系的最小上界.

(4) 因为 $\alpha\in\alpha^{+}$, 所以 $\alpha^{+}>\alpha$, 若存在序数 β, 有 $\alpha\in\beta$, 只要证明 $\alpha^{+}\in\beta$, 又只要证明 $\alpha^{+}\subset\beta$. 由 $\alpha\in\beta$, 可得 $\alpha\subset\beta$, $\alpha^{+}=\alpha\cup\{\alpha\}\subset\beta$, 这说明 α^{+} 大于 α 的最小的序数.

(5) $\{x\mid x$ 是序数 $\wedge\, x<\alpha\}$

$=\{x\mid x$ 是序数 $\wedge\, x\in\alpha\}\subseteq\alpha$.

反之, 若 $x\in\alpha$, 由定理 6.13(1) 可知 x 是序数, 所以, $x\in\{x\mid x$ 是序数 $\wedge\, x<\alpha\}$. ▌

由定理 6.16, 给出的下面各定义是有效的, 即所定义的结果都是序数:

首先记 $\omega^{+}=\omega+1$, $\omega^{++}=\omega+2$, $\omega^{+++}=\omega+3$, $\cdots$.

定义 $\omega+\omega=\bigcup\{\omega+n\mid n\in\omega\}$, 并记 $\omega\cdot 2=\omega+\omega$, $\omega\cdot 3=\omega+\omega+\omega$, $\cdots$, $\omega\cdot n=\underbrace{\omega+\omega+\cdots+\omega}_{n\text{个}}$.

定义 $\omega^2=\omega\cdot\omega=\bigcup\{\omega\cdot n\mid n\in\omega\}$,

$\omega^3=\omega\cdot\omega\cdot\omega=\bigcup\{\omega\cdot\omega\cdot n\mid n\in\omega\}$, $\cdots$.

进而可得 ω^{ω}, $\omega^{\omega^{\omega}}$, $\cdots$

序数按从小到大的排列应该是这样的:

$0<1<2<\cdots<\omega<\omega+1<\cdots<\omega\cdot 2<\omega\cdot 3<\cdots<\omega^2<\cdots<\omega^{\omega}<\cdots<\omega^{\omega^{\omega}}<\cdots$

定义 6.8 设 α 为一个序数, 若存在序数 β 使得 $\alpha=\beta^{+}$, 则称 α 为后继序数.

显然, 1, 2, 3, $\cdots$ 是后继序数, $\omega+1$, $\omega+2$, $\cdots$, $\omega\cdot 2+1$, $\omega\cdot 2+2$, $\cdots$, $\omega\cdot n+1$, $\omega\cdot n+2$, $\cdots$, $\omega^{\omega}+1$, $\omega^{\omega}+2$, $\cdots$ 也都是后继序数.

而 0 不是后继序数, ω, $\omega\cdot 2$, $\omega\cdot 3$, $\cdots$, ω^2, ω^3, $\cdots\omega^{\omega}$, $\omega^{\omega^{\omega}}$, $\cdots$ 都不是后继序数.

根据以上讨论, 可以将序数写成三类:

第一类: 0;

第二类：后继序数；

第三类：极限序数，不是第一类和第二类的序数都是极限序数，如 $\omega, \omega \cdot 2, \cdots$ 都是极限序数.

§6.4 关于基数的进一步讨论

在第五章中，为了给出集合的基数的概念，曾经做过5条基本规定（作为公理），现在可以给集合的基数重新下定义，并且可以证明两种定义法在 ZFZ 公理系统中是相容的.

定理 6.17（Hartogs 定理） 对于任何集合 A，都存在序数 α，使得 $A \preccurlyeq \cdot \alpha$

本定理的证明要用到替换公理，这里略去

定理 6.18（良序定理） 对于任意的集合 A，都存在 A 上的一个良序.

本定理的证明要用到选择公理，这里略去.

定理 6.19（命数定理） 对于任何集合 A，都存在序数 α，使得 $A \approx \alpha$.

证明 设 A 是任意一个集合，由良序定理可知，存在 A 上的良序 $<$，则 $\langle A, < \rangle$ 为一个良序集，设 α 为 $\langle A, < \rangle$ 的 $\in$ 象，则 $A \approx \alpha$. 由于 α 为序数，就证明了命数定理. ▌

由命数定理保证下面定义是有效的.

定义 6.9 设 A 为一个集合，称与 A 等势的最小序数为 A 的基数，记作 Card A.

设 α 为一个序数，若存在集合 A，使得 card$A = \alpha$，则称 α 为基数.

由这个定义，可以证明第五章中的最基本的前两条规定是正确的.

定理 6.20 (1) 对于任意的集合 A 和 B，

$$\text{card}A = \text{card}B \Longleftrightarrow A \approx B.$$

(2) 对于任意的有穷集合 A，card$A$ 是与 A 等势的唯一的自然数.

证明 (1) 必要性，由定义 6.9 可知，$A \approx \mathrm{card}A$，$B \approx \mathrm{card}B$，于是，$A \approx \mathrm{card}A = \mathrm{card}B \approx B$，所以 $A \approx B$.

反之，设 $\mathrm{card}A = \alpha$，由 $A \approx B$，得 $\alpha \approx B$，下面证明 $\mathrm{card}B = \alpha$，否则，存在序数 $\beta \in \alpha$，使得 $\mathrm{card}B = \beta$，于是，$\beta \approx B \approx A \Rightarrow \beta \approx \alpha$，这与 $\mathrm{card}A = \alpha$ 矛盾.

(2) 由于 A 是有穷集合，因而存在唯一的自然数 n，使得 $A \approx n$，又因为 n 不与自己的任何元素等势，所以 n 是与 A 等势的最小的自然数，因而 $\mathrm{card}A = n$. ▌

定义 6.10 设 α 为一序数，若 α 不与比它小的任何序数等势，则称 α 为**初始序数**.

定理 6.21 设 α 为一序数，则 α 为初始序数当且仅当 α 为一个基数.

证明 设 α 为一个初始序数. 由于 $\alpha \approx \alpha$，且 α 不与任何比它小的序数等势，所以 α 是与 α 等势的最小序数，因而 $\mathrm{card}\alpha = \alpha$，故 α 为一基数.

反之，设 α 为一基数，则存在集合 A，使得 $\mathrm{card}A = \alpha$. 下面只要证明任何比 α 小的序数 β 都不与 α 等势. 否则，存在 $\beta \in \alpha$，使得 $\beta \approx A$，这与 α 为 A 的基数是矛盾的. ▌

由定理 6.21 可知，称一个序数是初始序数与称它为基数是一回事.

在序数列：

$$0 < 1 < 2, \cdots < \omega < \omega + 1 < \cdots < \omega \cdot 2 < \cdots < \omega \cdot 3 < \cdots < \omega^2 < \cdots < \omega^\omega < \cdots < \omega^{\omega^\omega} < \cdots$$

中，全体自然数都是初始序数，因而它们都是基数. ω 是初始序数，它是基数，在第五章中，已将它记为 $\aleph_0$，比 $\omega(\aleph_0)$ 大的第一个初始序数为 ω_1，在第五章中记 $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$，ω_2 也是初始序数，….

习　题　六

1. 设 $\langle A, \prec_A \rangle$，$\langle B, \prec_B \rangle$ 是两个拟序集，$f: A \to B$，且 $\forall x, y \in A$，满足：

$$x \prec_A y \Rightarrow f(x) \prec_B f(y).$$

(1) 是否可以断言 f 是单射的？

(2) 是否可以断言 $x \prec_A y \Leftrightarrow f(x) \prec_B f(y)$？

(3) 若 $\prec_A$、$\prec_B$ 分别是 A，B 上的拟线序关系，(1)、(2) 中的结论如何？

2. 设 R 是集合 A 上的拟序关系，证明 R^{-1} 也是 A 上的拟序关系.

3. 设 $\langle A, R \rangle$ 为全序（线序）集，A 是 n 元集.

(1) 证明 R 中含有 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 个有序对；

(2) 当 R 是拟线序时，R 中共含多少个有序对？

4. 设 Z^+ 为正整数集，则 $\langle Z_+, < \rangle$ 是良序集，其中 $<$ 为小于关系，设 $f: Z_+ \to N$，且 $\forall n \in Z_+$，$f(n)$ 等于 n 中不同的素数因子的个数. 在 Z_+ 上定义二元关系如下：

$\forall m, n \in Z_+$，

$$mRn \Leftrightarrow f(m) < f(n) \vee (f(m) = f(n) \wedge m < n).$$

证明 $\langle Z_+, R \rangle$ 是良序集.

5. 设 $\langle A, < \rangle$ 为良序集，$f: A \to A$，且满足如下条件：$\forall x, y \in A$，若 $x < y$，则 $f(x) < f(y)$. 证明：$\forall x \in A$，均有 $x \leqslant f(x)$.

6. 设 A 为一个给定的集合，对自然数 N 及 N 上的良序 $\in_N$ 使用超限递归定理，取 $\gamma(x, y)$ 为 $y = A \cup (\cup \cup \operatorname{ran} x)$，设 F 是 N 上由 γ 构造的函数.

(1) 计算 $F(0)$，$F(1)$，$F(2)$. 试寻找 $F(n)$ 应满足的递推公式.

(2) 证明：如果 $a \in F(n)$，则 $a \subseteq F(n)$.

(3) 设 $B = \cup \operatorname{ran} F$，证明 B 是传递集，且 $A \subseteq B$.

7. 整数集合 Z 在通常的顺序下（在实数轴上的顺序）不是良序，改变 Z 中元素的顺序为

$0, 1, 2, \cdots, -1, -2, \cdots.$

(1) 在新排顺序中，令 $<$ 为，$\forall x, y \in Z$，$x < y$ 当且仅当 y 排在 x 的后面，证明 $<$ 为 Z 上的良序；

(2) 在(1)中给出的良序集$<Z,<>$上定义函数 E 如下

$$E(t)=\{E(x)\mid x<t\},$$

试求 $E(3)$, $E(-1)$, $E(-2)$, ….

8. 设$<A,<_A>$和$<B,<_B>$是两个良序集，已知$<A,<_A>\cong<B,<_B>$，证明从$<A,<_A>$到$<B,<_B>$只能存在一个同构.

9. 设$<A,<>$是拟序集，在 A 上定义函数 F 如下，对于任意的 $a\in A$，$F(a)=\{x\mid x\in A\wedge x\preccurlyeq a\}$，设 $S=\operatorname{ran}F$，证明 F 是$<A,<>$与$<S,\subseteq>$之间的同构.

10. 设$<A,<>$是一个良序集，它的序数为 α，设 $B\subseteq A$，β 是良序集$<B,<^0>$的序数. 证明：$\beta\in\alpha$，其中$<^0$ 为$<$在 B 上的限制.

第二部分　图论

第七章 图

§7.1 图的基本概念

在现实生活中、生产活动中以及科学研究中，人们经常遇到各种事物之间的关系. 要将各种关系形象而直观地描绘出来，人们常用点表示事物，用点之间是否有连线表示事物之间是否有某种关系，于是点和点之间的若干条连线就构成了图. 其实，二元关系的关系图，都在我们所研究的图的范围之中. 在本节中，要给出图的严格的数学定义及其一系列的有关的基本概念.

为了给出无向图的定义，首先给出无序积的概念.

设 A、B 为任意的两个集合，称

$$\{(a,b) \mid a\in A \wedge b\in B\}$$

为 A 与 B 的**无序积**，记作 $A\&B$.

为方便起见，将无序积中的无序对(a,b)记为(a,b)，并且允许 $a=b$. 需要注意的是，无论 a、b 是否相等，均有$(a,b)=(b,a)$.

下面将给出关于图的一系列的基本概念.

定义 7.1 一个无向图是一个有序的二元组$<V,E>$，记作 G，其中，

(1) $V\neq\varnothing$ 称为 G 的**顶点集**，其元素称为**顶点**或**结点**；

(2) E 称为**边集**，它是无序积 $V\&V$ 的多重子集[①]，其元素称为**无向边**，简称为**边**.

定义 7.2 一个有向图是一个有序的二元组$<V,E>$，记作 D，其中，

---

① 元素可以重复出现的集合称为多重集合，某元素重复出现的次数称为该元素的重复度. 例如，$\{a,a,b,b,b,c\}$为一个多重集合，a,b,c 的重复度分别为 2,3,1.

(1) $V\neq\varnothing$ 称为 D 的顶点集，其元素称为顶点或结点；

(2) E 称为边集，它是卡氏积 $V\times V$ 的多重子集，其元素称为有向边，简称边.

对于无向图 G 和有向图 D，人们总是用图形来表示它们，即用小圆圈(有的书上也用实心点)表示顶点，用顶点之间的线段表示无向边，用有向线段表示有向边，将无向图或有向图表示成图形.

【例 7.1】 画出下面二图的图形.

(1) $G=\langle V,E\rangle$，其中

$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$，

$E=\{(v_1,v_1),(v_1,v_2),(v_1,v_2),(v_2,v_3),(v_3,v_4),(v_1,v_3)\}$.

(2) $D=\langle V,E\rangle$，其中，

$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$，

$E=\{\langle v_1,v_2\rangle,\langle v_1,v_2\rangle,\langle v_1,v_3\rangle,\langle v_3,v_1\rangle,\langle v_2,v_3\rangle,\langle v_3,v_4\rangle,\langle v_4,v_4\rangle\}$.

解 (1) 的图形为图 7.1(a)所示，(2) 的图形为图 7.1(b)所示.

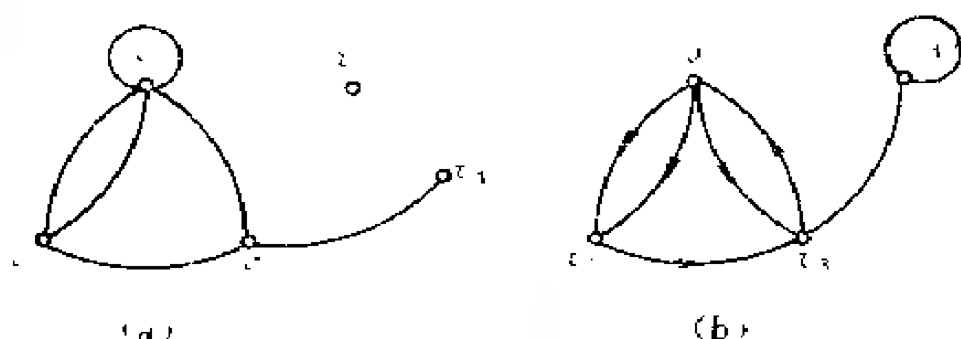


图 7.1

在图的定义中，用 G 表示无向图，用 D 表示有向图，在应用和研究图的性质时，有时用 G 泛指一个图(无向图或有向图)，但是，

D只能表示有向图. 为方便起见,有时用$V(G)$、$E(G)$分别表示图G的顶点集和边集;用$V(D)$、$E(D)$表示有向图D的顶点集和边集. 另外,用$|V(G)|$,$|E(G)|$和$|V(D)|$,$|E(D)|$分别表示G和D的顶点数和边数,若$|V(G)|$(或$|V(D)|$)为n,则称G(或D)为**n阶图**(或**n阶有向图**).

对于图G来说,若$|V(G)|$和$|E(G)|$均为有限数,则称G为**有限图**,本书只研究有限图.

为方便起见,在无向图中,常用$e_k=(v_i,v_j)$表示边,在有向图中,也常用$e_k=\langle v_i,v_j\rangle$表示有向边.

在图G中,若$E(G)=\varnothing$,则称G为**零图**,此时,又若$|V(G)|=n$,则称G为**n阶零图**,记为N_n,特别是称N_1为平凡图.

在无向图和有向图的定义中,都规定顶点集为非空的集合,但在图的运算中,可能产生顶点集为空集的运算结果,为此规定顶点集为$\varnothing$的图为**空图**,记为$\varnothing$.

在讨论图的性质和图的应用中,一般情况下,都不用按定义写出它的顶点集和边集,而只是画出它的图形来. 对于顶点和边都不标定字母的图称为**非标定图**,而称顶点或边用字母标定的图为**标定图**.

另外,将有向图D各有向边的箭头都去掉,所得图为无向图G,称为D的**基图**.

定义 7.3 设$G=\langle V,E\rangle$为一个无向图,$e_k=(v_i,v_j)\in E$,则称v_i,v_j为e_k的**端点**,e_k与v_i(e_k与v_j)是**彼此相关联的**. 若$v_i\neq v_j$,则称e_k与v_i(e_k与v_j)的关联次数为1. 若$v_i=v_j$,则称e_k与v_i的关联次数为2,此时称e_k为**环**. 设$v_l\in V$,并且$v_l\neq v_i$且$v_l\neq v_j$,则称e_k与v_l的关联次数为0.

设$D=\langle V,E\rangle$为一个有向图,$e_k=\langle v_i,v_j\rangle\in E$,称$v_i,v_j$为$e_k$的端点,并称$v_i$为$e_k$的**始点**,$v_j$为$e_k$的**终点**. 若$v_i=v_j$,则称$e_k$为$D$中一个环.

无论在无向图还是在有向图中,无边关联的顶点均称为**孤立**

点.

定义 7.4 设 $G=\langle V,E\rangle$ 为一个无向图，对于任意的 $v_i,v_j\in V$，若存在边 $e_k\in E$，使得 $e_k=(v_i,v_j)$，则称 v_i 与 v_j 是**彼此相邻的**，简称是**相邻的**.

对于任意的 $e_k,e_l\in E$，若 e_k 与 e_l 至少有一个公共端点，则称 e_k 与 e_l 是彼此相邻的，简称是相邻的.

设 $D=\langle V,E\rangle$ 为一个有向图，对于任意的 $v_i,v_j\in V$，若存在 $e_k\in E$，使得 $e_k=\langle v_i,v_j\rangle$，则称 v_i **邻接到** v_j，v_j **邻接于** v_i.

设 G 为任意一个无向图，对任意的 $v\in V(G)$，称

$$\{u\mid u\in V(G)\wedge (u,v)\in E(G)\wedge u\neq v\}$$

为 v 的**邻域**，记作 $N_G(v)$，称

$$N_G(v)\cup\{v\}$$

为 v 的**闭邻域**，记作 $\overline{N}_G(v)$. 称

$$\{e\mid e\text{ 与 }v\text{ 相关联}\}$$

为 v 的**关联集**，记作 $I_G(v)$.

设 D 为任意一个有向图，对于任意的 $v\in V(D)$，称

$$\{u\mid u\in V(D)\wedge \langle v,u\rangle\in E(D)\wedge u\neq v\}$$

为 v 的**后继元集**，记作 $\Gamma_D^+(v)$，称

$$\{u\mid u\in V(D)\wedge \langle u,v\rangle\in E(D)\wedge u\neq v\}$$

为 v 的**先驱元集**，记作 $\Gamma_D^-(v)$. 称

$$\Gamma_D^+(v)\cup\Gamma_D^-(v)$$

为 v 的**邻域**，记作 $N_D(v)$，称

$$N_D(v)\cup\{v\}$$

为 v 的**闭邻域**，记作 $\overline{N}_D(v)$.

定义 7.5 设 G 为一无向图，$e_{i_1},e_{i_2},\cdots,e_{i_r}\in E(G)$，$r\geqslant 1$，若 $e_{i_s}=(v_i,v_j)$，$1\leqslant s\leqslant r$，则称 $e_{i_1},e_{i_2},\cdots,e_{i_r}$ 为**平行边**，r 为边 (v_i,v_j) 的**重数**.

设 D 为一个有向图，$e_{i_1},e_{i_2},\cdots,e_{i_r}\in E(D)$，$r\geqslant 1$，若 $e_{i_s}=\langle v_i,v_j\rangle$，$1\leqslant s\leqslant r$，则称 $e_{i_1},e_{i_2},\cdots,e_{i_r}$ 为**平行边**，r 为有向边 $\langle v_i,v_j\rangle$ 的

重数.

称含平行边的图为**多重图**. 称既不含平行边也不含环的图为**简单图**.

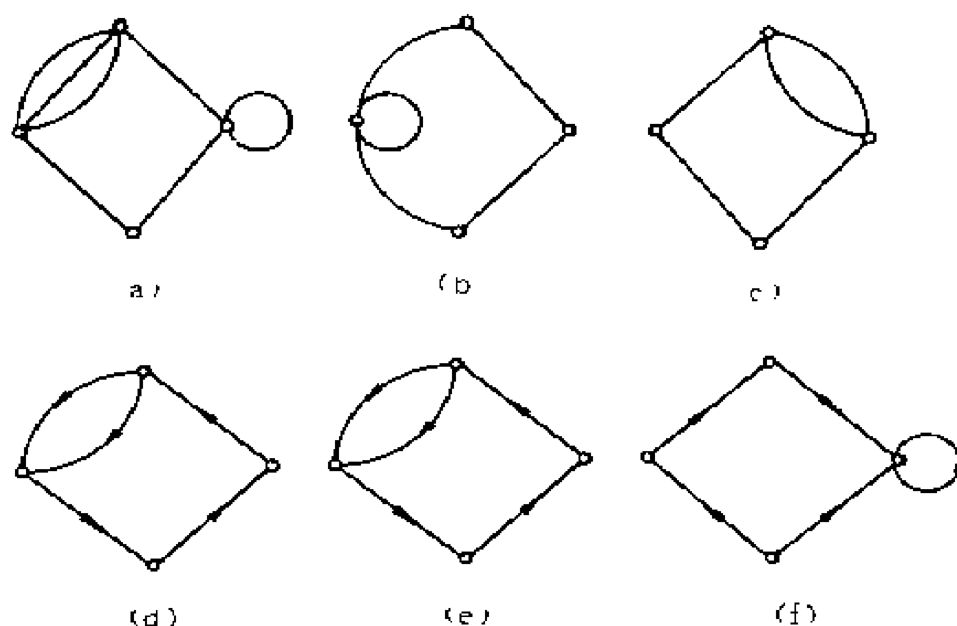


图 7.2

在图 7.2 所示的 6 个图中，只有(e)为简单图，其它 5 个图都是非简单图，其中(c)、(d)为多重图.

定义 7.6 设无向图 $G=\langle V,E\rangle$，对于任意的 $v\in V$，称 v 作为 G 中边的端点的次数之和为 v 的**度数**[①]，简称**度**，记作 $d_G(v)$，在不发生混淆的情况下，也可以简记为 $d(v)$.

设有向图 $D=\langle V,E\rangle$，对于任意的 $v\in V$，称 v 作为 D 中边的始点的次数之和为 v 的**出度**，记作 $d_D^+(v)$，简记 $d^+(v)$. 称 v 作为 D 中边终点的次数之和为 v 的**入度**，记作 $d_D^-(v)$，简记 $d^-(v)$，称 $d_D^+(v)+d_D^-(v)$ 为 v 的**度数**，记作 $d_D(v)$，简记为 $d(v)$.

从定义容易看出，若 v 为 G 中孤立点，则 $d_G(v)=0$.

① v 的度数也可以如下定义：称 G 中所有边与 v 的关联次数之和为 v 的度数.

设 G 为无向图，令

$$\Delta(G)=\max\{d(v)\mid v\in V(G)\},$$
$$\delta(G)=\min\{d(v)\mid v\in V(G)\},$$

称 $\Delta(G)$，$\delta(G)$ 分别为 G 的**最大度数**和**最小度数**，简称**最大度**和**最小度**。

设 D 为一个有向图，类似可定义 D 中的最大度数 $\Delta(D)$ 和最小度数 $\delta(G)$. 另外，令

$$\Delta^+(D)=\max\{d^+(v)\mid v\in V(D)\},$$
$$\delta^+(D)=\min\{d^+(v)\mid v\in V(D)\},$$
$$\Delta^-(D)=\max\{d^-(v)\mid v\in V(D)\},$$
$$\delta^-(D)=\min\{d^-(v)\mid v\in V(D)\},$$

它们依次被称为 D 的最大出度、最小出度、最大入度、最小入度.

在不发生混淆的情况下，$\Delta(G)$，$\delta(G)$ 可分别简记为 Δ 和 δ，$\Delta^+(D)$，$\delta^+(D)$，$\Delta^-(D)$，$\delta^-(D)$ 可分别简记为 Δ^+，δ^+，Δ^-，δ^-.

从定义不难看出，若 G 为 n 阶无向简单图，则 $\Delta(G)\leqslant n-1$，若 D 为 n 阶有向简单图，则 $\Delta(D)\leqslant 2(n-1)$.

下面给出的定理和推论是由欧拉于 1936 年给出的，称为**图论的基本定理**或**握手定理**.

定理 7.1 设 $G=\langle V,E\rangle$ 为一个无向图，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，$|E|=m$，则

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i)=2m.$$

证明 在 G 中的每一条边（包括环）均有两个端点，所以在计算 G 中各顶点度数之和时，均提供 2 度，因而 m 条边共提供 $2m$ 度. ∎

定理 7.2 设 $D=\langle V,E\rangle$ 为一个有向图，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，$|E|=m$，则

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i)=2m \text{ 且 } \sum_{i=1}^{n} d^+(v_i)=\sum_{i=1}^{n} d^-(v_i)=m.$$

此定理的证明类似于定理 7.1.

推论 任何图 G(无向图或有向图)中,奇度数顶点的个数是偶数.

证明 设 $V_1=\{v|v\in V(G)\wedge d(v)$ 为奇数$\}$,

$V_2=\{v|v\in V(G)\wedge d(v)$ 为偶数$\}$.

则 $V_1\cap V_2=\varnothing$,$V_1\cup V_2=V$,于是

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i)=\sum_{v_i\in V_1} d(v_i)+\sum_{v_i\in V_2} d(v_i)=2m,$$

由于 $\sum_{v_i\in V_2} d(v_i)$ 和 $2m$ 均为偶数,所以 $\sum_{v_i\in V_1} d(v_i)$ 必为偶数. 又因为对于任意的 $v_i\in V_1$,$d(v_i)$ 为奇数,所以必有 $|V_1|$ 为偶数,即 G 中奇度顶点为偶数个. ▌

今后常称度数为奇数的顶点为**奇度顶点**,度数为偶数的顶点为**偶度顶点**.

设 $G=\langle V,E\rangle$ 为一无向图,$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$,称 $(d(v_1),d(v_2),\cdots,d(v_n))$ 为 G 的**度数列**. 易知,对于顶点编好号的给定图 G,它的度数列是唯一确定的. 反之,对于任意给定的非负整数列 $\boldsymbol{d}=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$,若存在以 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 为顶点集的 n 阶图 G,以 $\boldsymbol{d}$ 为度数列,则称 $\boldsymbol{d}$ 是**可图化的**. 特别地,若存在以 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 为顶点集的 n 阶简单图 G,以 $\boldsymbol{d}$ 为度数列,则称 $\boldsymbol{d}$ 是**可简单图化的**.

要问的问题是,$\boldsymbol{d}=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$($d_i\geq 0$ 且为整数,$i=1,2,\cdots,n$)在什么条件之下是可图化的,又在什么条件下是可简单图化的. 下面给出的定理可答以上问题.

定理 7.3 $\boldsymbol{d}=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$($d_i\geq 0$ 且为整数,$i=1,2,\cdots,n$)是可图化的当且仅当 $\sum_{i=1}^{n} d_i\equiv 0 \pmod 2$.

证明 由握手定理可知,必要性是显然的. 下面证明充分性.

由于 $\sum_{i=1}^{n} d_i\equiv 0 \pmod 2$,所以 $\boldsymbol{d}$ 中有偶数个奇数,设奇数个数

为 $2k(0<k\leqslant\left[\frac{n}{2}\right])$，奇数分别为 $d_{i_1},d_{i_2},\cdots,d_{i_k},d_{i_{k+1}},\cdots,d_{i_{2k}}$. 用如下的方法做无向图 $G=<V,E>$，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$. 首先在顶点 v_{i_r} 和 $v_{i_{r+k}}$ 之间连边，得边 $e_r=(v_{i_r},v_{i_{r+k}})$，$r=1,2,\cdots,k$. 若 d_i 为偶数，令 $d_i'=d_i$，若 d_i 为奇数，令 $d_i'=d_i-1$ 得 $\boldsymbol{d}'=(d_1',d_2',\cdots,d_n')$，则 $d_i'\geqslant 0$ 且为偶数. 再在 v_i 处做 $\frac{d_i'}{2}$ 条环 $e_{i_1},e_{i_2},\cdots,e_{i_{d_i'/2}}$，$i=1,2,\cdots,n$，将所得边集合在一起组成边集 E，则 $G=<V,E>$ 的度数列为 $\boldsymbol{d}$.

其实，在 G 中，若 d_i 为偶数，则 $d(v_i)=2\cdot\frac{d_i'}{2}=2\cdot\frac{d_i}{2}=d_i$. 若 d_i 为奇数，则 $d(v_i)=1+2\cdot\frac{d_i'}{2}=1+d_i'=1+d_i-1=d_i$，所以 $\boldsymbol{d}$ 是可图化的. ∎

【例 7.2】 下面给出的两个整数列，哪个是可图化的？

(1) $\boldsymbol{d}=(5,4,4,3,3,2)$；

(2) $\boldsymbol{d}=(5,3,3,2,1)$.

解 (1) $\sum_{i=1}^{n}d_i=1\pmod 2$，由定理 6.3 可知，$\boldsymbol{d}$ 不可图化.

(2) $\sum_{i=1}^{n}d_i=0\pmod 2$，由定理 7.3 可知，$\boldsymbol{d}$ 是可图化的. 以 $\boldsymbol{d}$ 为度数列的图可以有多个，图 7.3 所示的 3 个图都满足要求.

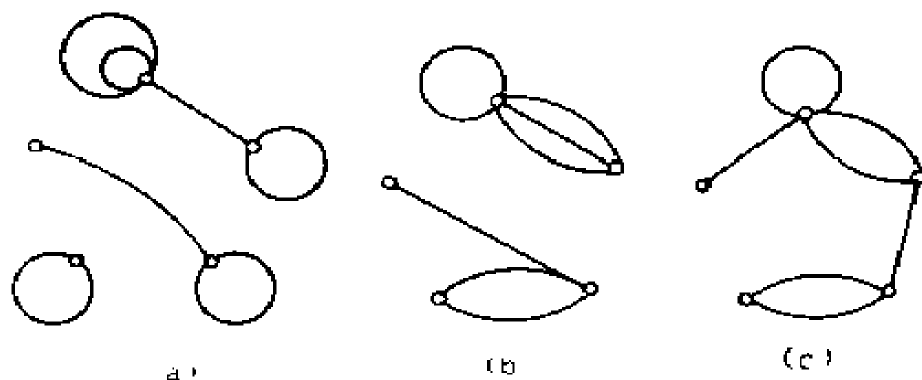


图 7.3

下面的问题是，给定的非负整数列 $\boldsymbol{d}=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 是可简单图化的条件又是什么？请看下面两个定理.

定理 7.4 设非负整数列 $\boldsymbol{d}=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$，$(n-1)\geqslant d_1\geqslant d_2\geqslant\cdots\geqslant d_n\geqslant 0$，则 $\boldsymbol{d}$ 是可简单图化的当且仅当对于每个整数 r，$1\leqslant r\leqslant(n-1)$，

$$\sum_{i=1}^{r} d_i\leqslant r(r-1)+\sum_{i=r+1}^{n}\min\{r,d_i\}\ \text{且}\ \sum_{i=1}^{n} d_i\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2).$$

本定理的证明略.

【例 7.3】 判断下列各非负整数列是否是可简单图化的？

(1) (5,4,3,2,2,1)；

(2) (5,4,,4,3,2)；

(3) (3,3,3,1)；

(4) (6,6,5,4,3,3,1)；

(5) (5,5,3,3,2,2,2)；

(6) $(d_1,d_2,\cdots,d_n)$，$d_1>d_2>\cdots>d_n\geqslant 1$.

解 用定理 7.4 进行判断.

(1) $\sum d_i\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$，所以所给数列不可简单图化. 其实，它也是不可图化的.

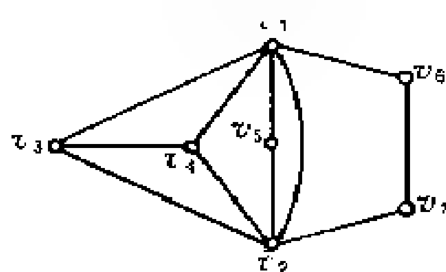
(2) $\sum d_i\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$，但 $d_1=5$，不满足 $d_1\leqslant n-1$ 的条件，所以所给数列不可简单图化.

(3) $\sum d_i\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$ 且 $d_1=4-1$（满足 $d_1\leqslant n-1$），但当取 $r=2$ 时，不满足 $\sum_{i=1}^{r} d_i\leqslant r(r-1)+\sum_{i=r+1}^{n}\min\{r,d_i\}$ 的条件，所以所给数列不是可简单图化的.

类似可证明(4)、(6)中数列是不可简单图化的.

但可以验证(5)中数列满足定理 7.4 中的一切条件，因而是可简单图化的. 图 7.4 图的(a)、(b)两图均以(5)中数列为度数列.

定理 7.5 设非负整数列 $\boldsymbol{d}=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$，$\sum_{i=1}^{n} d_i\equiv 0(\mathrm{mod}$



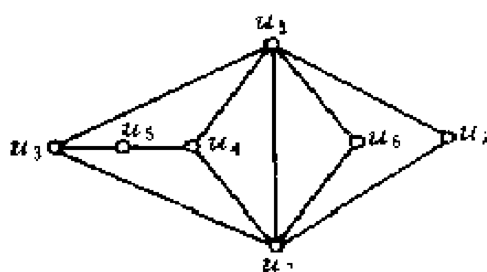


图 7.4

2) 且 $(n-1)\geq d_1\geq d_2\geq\cdots\geq d_n\geq 0$，则 $\boldsymbol{d}$ 是可简单图化的当且仅当 $\boldsymbol{d}'=(d_2-1,d_3-1,\cdots,d_{d_1+1}-1,d_{d_1+2},\cdots,d_n)$ 是可简单图化的.

证明 先证充分性. 因为 $\boldsymbol{d}'$ 是可简单图化的，设 G' 是以 $\boldsymbol{d}'$ 为度数列的简单图. $V(G')=\{v_2,v_3,\cdots,v_n\}$.

$$d_{G'}(v_i)=\begin{cases} d_i-1, & i=2,3,\cdots,d_1+1,\\ d_i, & i=d_1+2,d_1+3,\cdots,n.\end{cases}$$

在 G' 中增加一个新顶点 v_1，使 v_1 与 $v_2,v_3,\cdots,v_{d_1+1}$ 均相邻，设所得新图为 G. 在 G 中易知，$d_G(v_i)=d_i$，$i=1,2,\cdots,n$，即 G 以 $\boldsymbol{d}$ 为度数列，这说明 $\boldsymbol{d}$ 是可简单图化的.

下面证明必要性. 设 G 是以 $\boldsymbol{d}$ 为度数列的简单图，分两种情况讨论.

(1) 在 G 中，若存在 $v\in V(G)$，v 与度数为 $d_2,d_3,\cdots,d_{d_1+1}$ 的 d_1 个顶点均相邻，在 G 中去掉 v 及其 v 所关联的一切边，设所得图为 G'，则 G' 以 $\boldsymbol{d}'=(d_2-1,d_3-1,\cdots,d_{d_1+1}-1,d_{d_1+2},\cdots,d_n)$ 为度数列，这正说明 $\boldsymbol{d}$ 是可简单图化的.

(2) G 中不存在与度为 $d_2,d_3,\cdots,d_{d_1+1}$ 的顶点都相邻的度为 d_1 的顶点

在 G 中，设 $d_G(v_1)=d_1$，设 v_1 是所有度数为 d_1 的顶点中，其邻域中顶点度数之和最大的顶点，由 G 的性质可知，必存在度分别

为 $d_i, d_j (d_i > d_j)$ 顶点 v_i, v_j，而 $(v_1, v_i) \notin E(G)$，$(v_1, v_j) \in E(G)$. 因为 $d_i > d_j$，因而必存在 v_k，$(v_i, v_k) \in E(G)$，而 $(v_j, v_k) \notin E(G)$. 在 G 中，去掉边 (v_1, v_j) 和 (v_i, v_k)，加新边 (v_1, v_i) 和 (v_j, v_k)，得图设为 G_1. 易知，$d_{G_1}(v_i) = d_G(v_i)$，$i = 1, 2, \cdots, n$，于是 G_1 的度数列仍然为 $d = (d_1, d_2, \cdots, d_n)$，并且 v_1 在 G_1 中所邻顶点度数之和不会小于它在 G 中所邻顶点的度数之和. 对 G_1 重复上述过程，直到得到一个图 G_r，它有一个顶点 v_1 与度为 $d_2, d_3, \cdots, d_{d_1+1}$ 的所有顶点都相邻为止. 在 G_r 中去掉 v_1 及所关联的一切边，所得图为 G_r'，则 G_r' 以 $d' = (d_2 - 1, d_3 - 1, \cdots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \cdots, d_n)$ 为度数列，所以 d' 是可简单图化的. ∎

【例 7.4】 利用定理 7.5 判断下面两个非负整数列是否是可简单图化的.

(1) (5,5,4,4,2,2);

(2) (4,4,3,3,2,2).

解 (1) (5,5,4,4,2,2) 可简单图化的

$\Longleftrightarrow$ (4,3,3,1,1) 可简单图化的

$\Longleftrightarrow$ (2,2,0,0) 可简单图化的

$\Longleftrightarrow$ (1,−1,0)， 可简单图化的.

而(1，−1,0)显然是不可图化的，所以(1)中数列不是可简单图化的.

解 (2) (4,4,3,3,2,2) 可简单图化的

$\Longleftrightarrow$ (3,2,2,1,2) 可简单图化的

$\Longleftrightarrow$ (3,2,2,2,1) 可简单图化的

$\Longleftrightarrow$ (1,1,1,1)， 可简单图化的.

而(1,1,1,1)是可简单图化的是显然的，所以(2)中数列是可简单图化的. 图 7.5 所示的图就以(4,4,3,3,2,2)为度数列.

定义 7.7 设 $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$，$G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$ 为两个无向图. 若存在双射函数 $f: V_1 \to V_2$，对于任意的 $v_i, v_j \in V_1$ ($f(v_i), f(v_j) \in V_2$)，$(v_i, v_j) \in E_1$ 当且仅当 $(f(v_i), f(v_j)) \in E_2$ 且 (v_i, v_j) 与

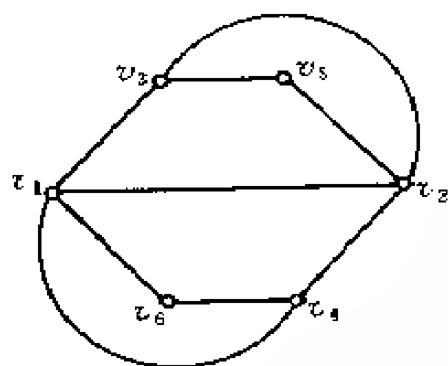


图 7.5

$(f(v_i),f(v_j))$ 重数相同，则称 G_1 与 G_2 **同构**，记作 $G_1 \cong G_2$.

若 G_1 与 G_2 为两个有向图，也类似地定义它们同构的概念，只是注意将无向边改为有向边，即 $\langle v_i,v_j\rangle \in E_1$ 当且仅当 $\langle f(v_i),f(v_j)\rangle \in E_2$ 且 $\langle v_i,v_j\rangle$ 与 $\langle f(v_i),f(v_j)\rangle$ 重数相同.

在图 7.6 中(a)$\cong$(b)，但(a)$\ncong$(c)，(d)$\cong$(e)$\cong$(f)，(g)$\cong$(i)，但(g)$\ncong$(h).

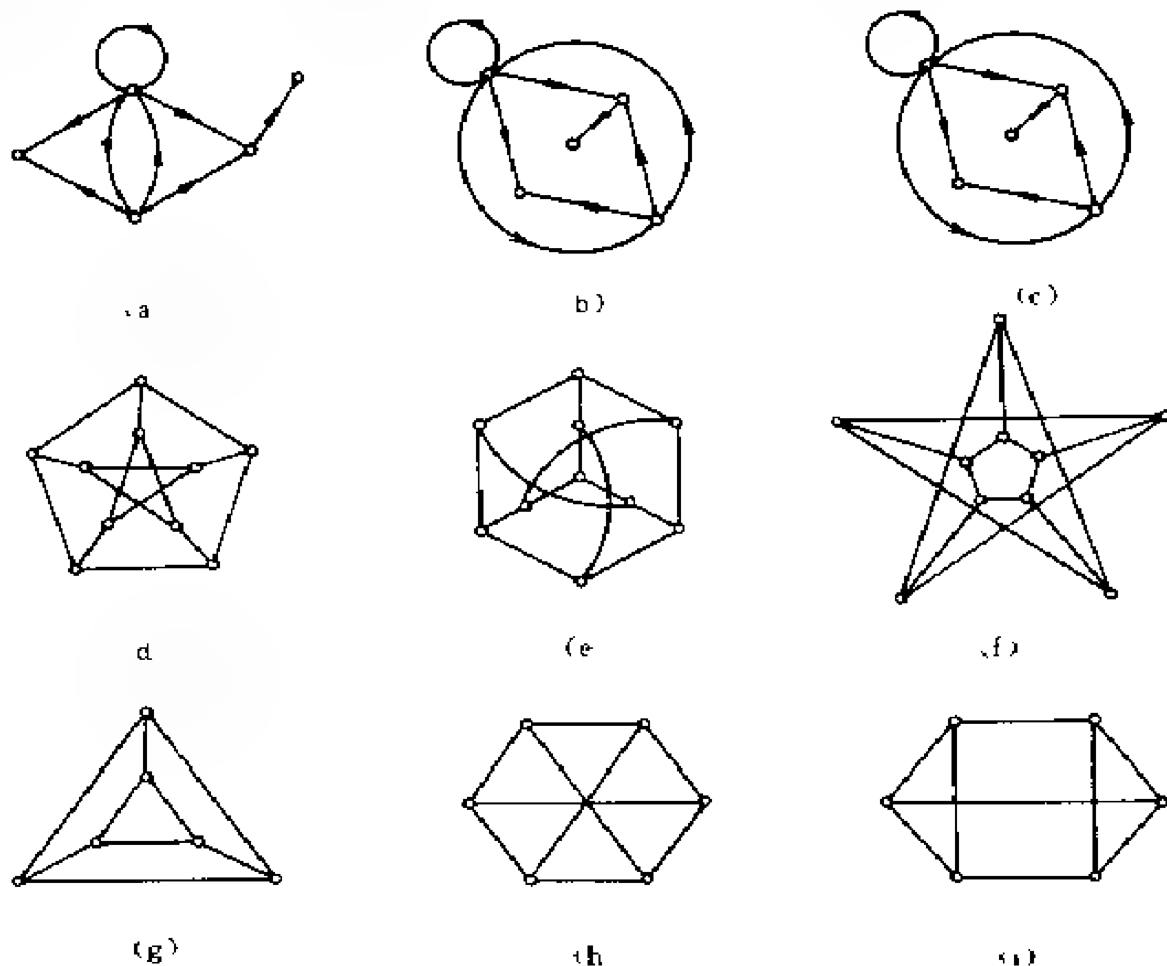


图 7.6

图中(d)称为**彼得森(Petersen)图**.

图之间的同构关系≅是全体图集合上的二元关系,它是自反的、对称的,并且是传递的,因而它是等价关系.在这个等价关系的每个等价类中均取出一个非标定图作为代表,凡是与这个代表同构的图(标定或非标定的),在同构的意义之下都看成是同一个图.图7.6中,(d)、(e)、(f)在同构的意义之下看成一个图,它们都是彼得森图.同样,(g)、(h)也看成同一个图.

若两个图$G_1 \cong G_2$,我们可以找到它们应满足的许多条件,比如,它们的阶数相同,边数相同,相同度数的顶点数相同等等,但这些条件都是两个图同构的必要条件,而不是充分条件.到目前为止,还没有找到判断两个图同构的有效的判别法,还只能根据定义判断.

定义 7.8 设G为$n(n \geq 1)$阶无向简单图,若G中每个顶点均与其余的$n-1$个顶点相邻,则称G为n阶无向**完全图**,记作K_n.

设D为$n(n \geq 1)$阶有向简单图,若对于任意的$v_i, v_j \in V(D)$ $(v_i \neq v_j)$,均有$\langle v_i, v_j \rangle \in E(D) \wedge \langle v_j, v_i \rangle \in E(D)$,则称$D$为$n$阶**有向完全图**.

设D为$n(n \geq 1)$阶有向简单图,若对于任意的$v_i, v_j \in V(D)$ $(v_i \neq v_j)$,有向边$\langle v_i, v_j \rangle$和$\langle v_j, v_i \rangle$中有且仅有一个属于$E(D)$,则称D为n阶**竞赛图**.

图7.7中,(a)为无向完全图K_5,(b)为3阶有向完全图,而(c)为4阶竞赛图.

定义 7.9 设G为$n(n \geq 1)$阶无向简单图,若对于任意的$v \in V(G)$,均有$d(v)=k$,则称G为**k-正则图**.

易知,n阶零图N_n是0-正则图.无向完全图K_n是$(n-1)$-正则图,彼得森图是3-正则图.图7.8中所示的5个图是著名的**柏拉图(Plato)图**.其中(a)为四面体图,它是3-正则图;(b)是六面体图(也称为方体图),它是3-正则图;(c)是八面体图,它是4-正则

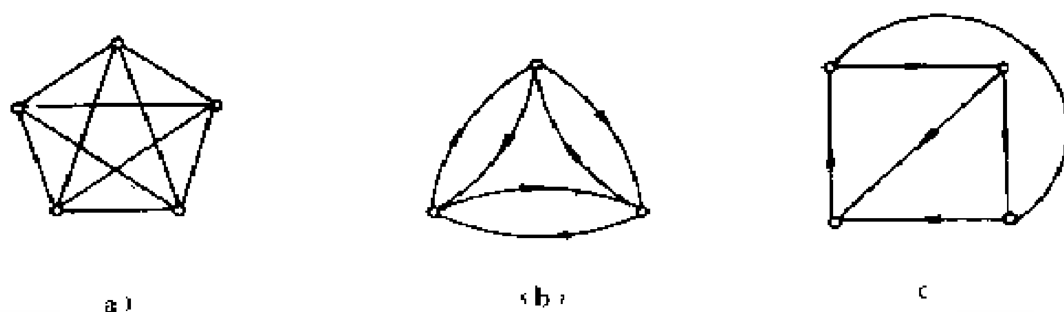


图 7.7

图；(d) 是十二面体图，它是 3 正则图；(e) 是二十面体图，它是 5 正则图.

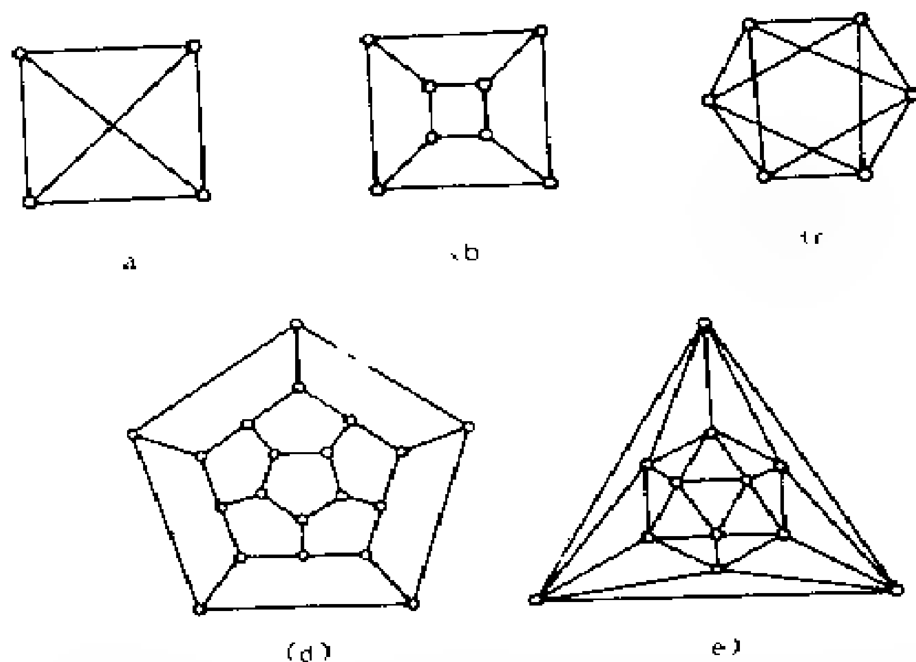


图 7.8

由握手定理可知，在 k 正则图中，边数 m 等于 kn 的一半，若 k 为奇数，则 n 必为偶数.

思考题 6 阶 3 正则图有几种非同构的情况？

定义 7.10 设 $G=\langle V,E\rangle$ 为一个 n 阶无向图，若 V 能分成 $r(r\geq 2)$ 个互不相交的子集 $V_1,V_2,\cdots,V_r$，使得 G 中任何一条边的两个端点都不在同一个 $V_i(i=1,2,\cdots,r)$ 中，则称 G 为 **r 部图**，记作 $G=\langle V_1,V_2,\cdots,V_r,E\rangle$. 特别地，当 $r=2$ 时，称 $G=\langle V_1,V_2,$

E）为二部图（或称偶图）. 设 G 是简单 r 部图，若对任意的 i（$i=1,2,\cdots,r$）V_i 中任一个顶点均与 V_j（$j\neq i$）中所有顶点相邻，则称 G 为完全 r 部图，当 $|V_i|=n_i$ 时，记 $G=K_{n_1,n_2,\cdots,n_r}$，当 $r=2$ 时，完全二部图 $G=K_{n_1,n_2}$.

图 7.9 所示图都是二部图，易知(a)≅(d)，(b)≅(e)，(c)≅(f). 且(b)，(c)，(e)，(f)全是完全二部图，(e)和(b)是 $K_{2,3}$，(c)与(f)是 $K_{3,3}$. 人们习惯于将二部图画成(d)，(e)，(f)的形式.

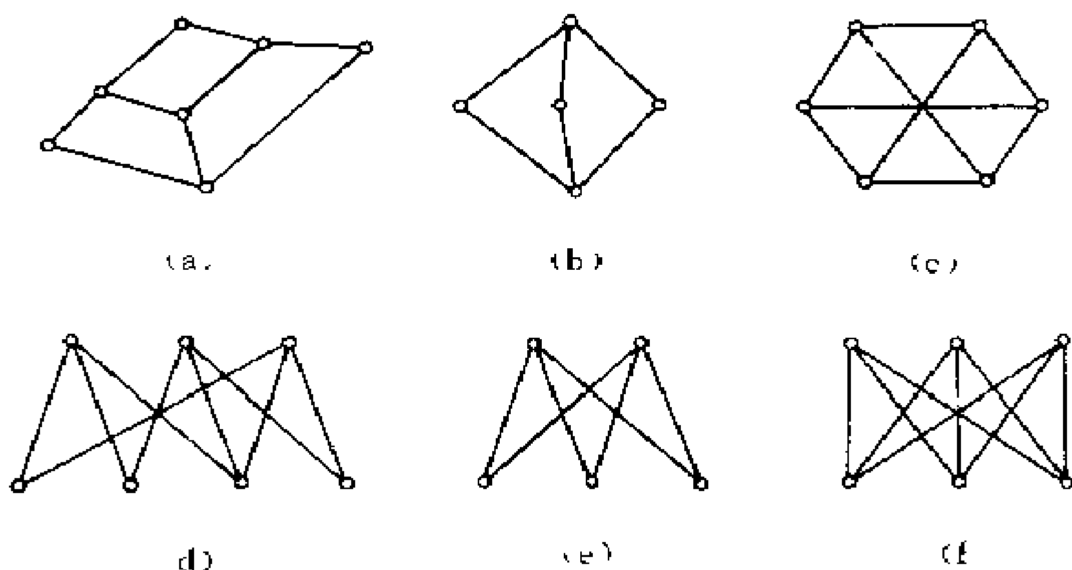


图 7.9

由定义可知，零图 $N_n(n\geq 1)$ 是二部图.

在 7.3 节将给出二部图的判别定理.

在 n 阶完全 r 部图 $K_{n_1,n_2,\cdots,n_r}$ 中，$n=\sum_{i=1}^{r} n_i$，$m=\sum_{i<j} n_i n_j$. 当 n,r 固定后，可以问这样的问题，即 $n_1,n_2,\cdots,n_r$ 各取何值时，使得 n 阶完全 r 部图中，边数 m 达到最大?

可以证明：对于固定的正整数 n,r（$n\geq r$），存在 k,s（$k\geq 1,0\leq s<r$），使得 $n=kr+s$，即 $n_1=n_2=\cdots=n_s=k+1$，$n_{s+1}=n_{s+2}=\cdots=n_r=k$，此时 $K_{n_1,n_2,\cdots,n_r}$ 的边数最多，即 m 取最大值.

常记边数 m 达到最大值的 n 阶完全 r 部图 $K_{n_1,n_2,\cdots,n_r}$ 为 $T_r(n)$，它的边数 m 记为 $t_r(n)$. 例如，

$$T_2(6)=K_{3,3},\quad m=t_2(6)=9;$$
$$T_2(5)=K_{3,2},\quad m=t_2(5)=6;$$
$$T_3(5)=K_{2,2,1},\quad m=t_3(5)=8;$$
$$T_4(5)=K_{2,1,1,1},\quad m=t_4(5)=9;$$
$$T_4(10)=K_{3,3,2,2},\quad m=t_4(10)=37.$$

设 $G=\langle V_1,V_2,\cdots,V_r,E\rangle$ 为任意的 n 阶 r 部图，设 $n_i=|V_i|$，则 G 的边数 m 满足

$$m=\sum_{i<j} n_i n_j \leq t_r(n),$$

当 $m=t_r(n)$ 时，必有 $G\cong T_r(n)$.

定义 7.11 设 $G=\langle V,E\rangle$，$G'=\langle V',E'\rangle$ 为两个图（同为无向图或同为有向图），若 $V'\subseteq V$ 且 $E'\subseteq E$，则称 G' 是 G 的**子图**，G 为 G' 的**母图**，记作 $G'\subseteq G$.

已知 $G'\subseteq G$，又

若 $V'\subset V$ 或 $E'\subset E$，则称 G' 是 G 的**真子图**；

若 $V'=V$，则称 G' 为 G 的**生成子图**.

设 $G=\langle V,E\rangle$ 为一图，$V_1\subset V$ 且 $V_1\neq\varnothing$，称以 V_1 为顶点集，以 G 中两个端点都在 V_1 中的边组成边集 E_1 的图，为 G 的 V_1 导出的子图，记作 $G[V_1]$.

又设 $E_1\subset E$ 且 $E_1\neq\varnothing$，称以 E_1 为边集，以 E_1 中的边关联的顶点为顶点集 V_1 的图，为 G 的 E_1 **导出的子图**，记作 $G[E_1]$.

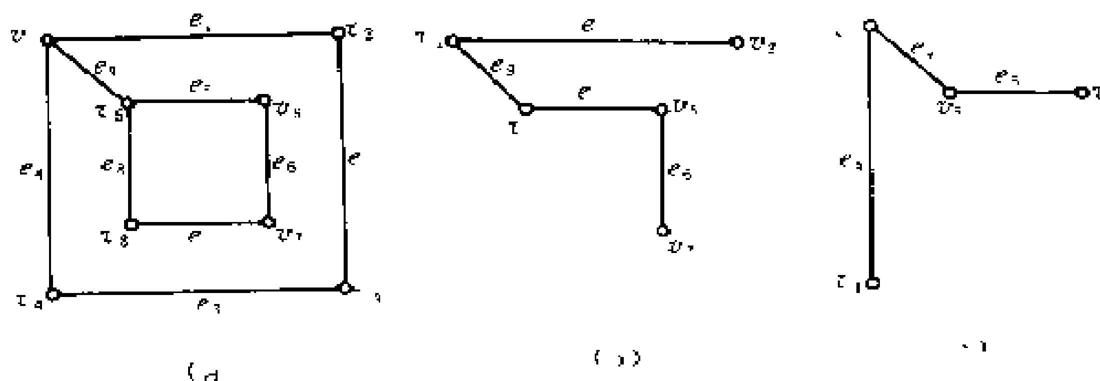


图 7.10

图 7.10 中，(b)为$\{v_1,v_2,v_5,v_6,v_7\}$的导出子图，(c)为$\{e_4,e_7,e_9\}$的导出子图.

对于给定的正整数 n 和 m，构造出所有非同构的 n 阶 m 条边的无向简单图（要求 $m\leqslant\frac{n(n-1)}{2}$），或有向简单图（要求 $m<n(n-1)$），这是目前还未解决的难题，但对于较小的 n,m，还是容易构造出来的.

【例 7.5】 (1) 画出 5 阶 4 条边的所有非同构的无向简单图；

(2) 画出 4 阶 2 条边的所有非同构的有向简单图.

解 (1) 由握手定理可知，所画的图各顶点的度数之和为 8，最大度小于等于 4. 对于无孤立点的情况，度数列只有下面 3 种情况：

(1) (4,1,1,1,1)；

(2) (3,2,1,1,1)；

(3) (2,2,2,1,1)；

若有孤立点也只能有一个（想一想为什么?），其度数列有以下两种情况：

(4) (3,2,2,1,0)；

(5) (2,2,2,2,0)；

(1)～(5)对应的图为图 7.11 中(a)～(e)所示. 其中，对应(3)的图除(c)外，还有一个非同构的，请读者画出来. 这些图都是 K_5 的子图.

(2) 所要求的有向图各顶点的度数之和均为 4，出度之和等于入度之和等于 2. 容易画出所有非同构的满足要求的有向简单图，为图 7.11 中(f)～(j)所示. 其实，它们都是 4 阶有向完全图的子图.

定义 7.12 设 $G=\langle V,E\rangle$ 为 n 阶简单图（无向或有向的），称以 V 为顶点集，以使 G 成为 n 阶完全图的所有添加边组成的集合为边集的图，为 G 的补图，记作 $\overline{G}$.

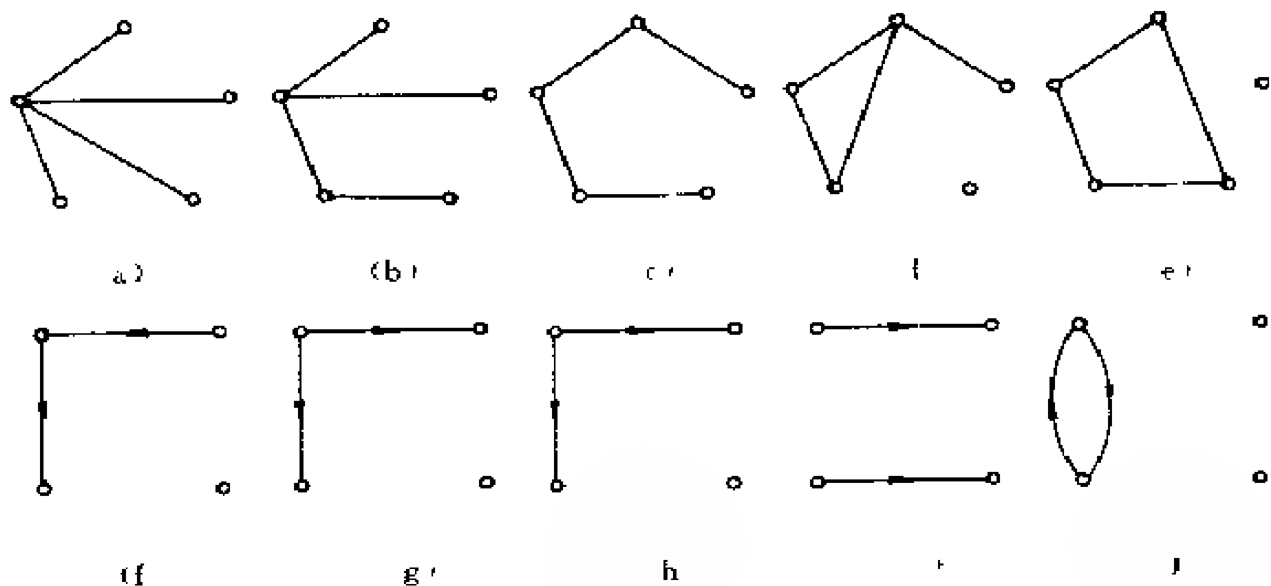


图 7.11

若 $G\cong\overline{G}$,则称 G 为**自补图**.

思考题 若 G 为自补图,则 G 的阶 n 应满足什么条件? 对于无向图和有向图分别讨论.

到目前为止,关于图运算的定义在不同的图论书中还很不统一. 本书中给出的定义与其它书中的定义可能有所不同,请读者注意区分.

定义 7.13 设 $G=\langle V,E\rangle$ 为一无向图.

(1) 设 $e\in E$,用 $G-e$ 表示从 G 中去掉边 e,称为删除 e. 又设 $E'\subset E$,用 $G-E'$ 表示从 G 中删除 E' 中的所有边,称为删除 E'.

(2) 设 $v\in V$,用 $G-v$ 表示从 G 中去掉 v 及 v 关联的一切边,称为删除顶点 v. 又设 $V'\subset V$,用 $G-V'$ 表示从 G 中删除 V' 中的所有顶点,称为删除 V'.

(3) 设 $e=(u,v)\in E$,用 $G\backslash e$ 表示从 G 中删除 e,将 e 的两个端点 u,v 用一个新的顶点 w 代替,使 w 关联除 e 外的 u,v 关联的一切边,称为边 e 的**收缩**.

(4) 设 $u,v\in V$(u,v 可能相邻,也可能不相邻),用 $G\cup(u,v)$(或 $G+(u,v)$)表示在 u,v 之间加一条边 (u,v),称为**加新边**.

在边 $e=(u,v)$ 的收缩中，w 也可以取成 u 或 v.

简单图经过边的收缩或加新边后，可变成非简单图.

定义 7.14 设 $G_1=<V_1,E_1>$，$G_2=<V_2,E_2>$ 为两个图.

(1) 若 $V_1\cap V_2=\varnothing$，则称 G_1 与 G_2 是**不交的**；

(2) 若 $E_1\cap E_2=\varnothing$，则称 G_1 与 G_2 是**边不交的**，或**边不重的**.

不交的图必为边不交的，但反之不真.

定义 7.15 设 $G_1=<V_1,E_1>$，$G_2=<V_2,E_2>$ 均为无孤立点的图.

(1) 称以 $E_1\cup E_2$ 为边集，以 $E_1\cup E_2$ 中边关联的顶点组成的集合为顶点集的图为 G_1 与 G_2 的**并图**，记作 $G_1\cup G_2$.

(2) 称以 $E_1\cap E_2$ 为边集，以 $E_1\cap E_2$ 中边关联的一切顶点组成的集合为顶点集的图为 G_1 与 G_2 的**交图**，记作 $G_1\cap G_2$.

(3) 称以 E_1-E_2 为边集，以 E_1-E_2 中边关联的一切顶点组成的集合为顶点集的图，为 G_1 与 G_2 的**差图**，记作 G_1-G_2.

(4) 称以 $E_1\oplus E_2$（$\oplus$ 为对称差运算）为边集，以 $E_1\oplus E_2$ 中边关联的一切顶点组成的集合为顶点集的图，为 G_1 与 G_2 的**环和**，记作 $G_1\oplus G_2$.

其实，$G_1\oplus G_2=(G_1\cup G_2)-(G_1\cap G_2)$.

请注意 $E_1\oplus E_2$ 和 $G_1\oplus G_2$ 中 $\oplus$ 的区别.

在定义 7.15 中，还应注意以下两点：

(1) 当 $G_1=G_2$ 时，$G_1\cup G_2=G_1\cap G_2=G_1(G_2)$，$G_1-G_2=G_2-G_1=G_1\oplus G_2=\varnothing$（空图）.

(2) 当 G_1 与 G_2 边不重时，$G_1\cap G_2=\varnothing$，$G_1-G_2=G_1$，$G_2-G_1=G_2$，$G_1\oplus G_2=G_1\cup G_2$.

定义 7.16 设 $G_1=<V_1,E_1>$，$G_2=<V_2,E_2>$ 为两个不交的无向图. 称以 $V=V_1\cup V_2$ 为顶点集，以 $E=E_1\cup E_2\cup\{(u,v)\mid u\in V_1\wedge v\in V_2\}$ 为边集的图 G 为 G_1 与 G_2 的**联图**，记作 $G=G_1+G_2$.

从定义不难看出以下两点：

(1) $K_r+K_s=K_{r+s}$；

(2) $N_r+N_s=K_{r,s}$.

在图 7.12 中，(b)是(a)中 K_2 与 K_3 的联图 K_5，(d)是(c)中 N_2 与 N_3 的联图 $K_{2,3}$（N_2 由上面的两个顶点组成，N_3 由下面 3 个顶点组成）.

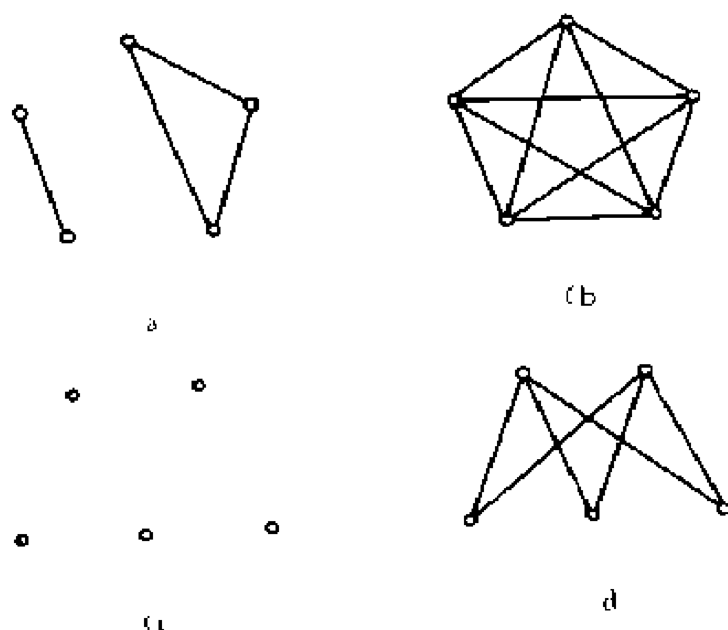


图 7.12

若 $|V_1|=n_1$，$|E_1|=m_1$，$|V_2|=n_2$，$|E_2|=m_2$，则联图中顶点数 $n=n_1+n_2$，边数 $m=m_1+m_2+n_1n_2$.

定义 7.17 设 $G_1=<V_1,E_1>$，$G_2=<V_2,E_2>$ 为两个无向简单图. 称以 $V=V_1\times V_2$ 为顶点集，以 $E=\{(<u_i,u_j>,<v_k,v_s>) \mid <u_i,u_j>,<v_k,v_s>\in V_1\times V_2 \wedge (u_i=v_k \wedge u_j$ 与 v_s 相邻 $\vee\ u_j=v_s \wedge u_i$ 与 v_k 相邻$)\}$ 为边集的图 G 为 G_1 与 G_2 的**积图**，记作 $G_1\times G_2$.

若设 $|V_i|=n_i$，$|E_i|=m_i$，$i=1,2$，则积图中，$|V|=n=n_1n_2$，$|E|=m=n_1m_2+n_2m_1$.

在图 7.13 中，(c)为(a)，(b)所示二图的积图.

用 0，1 分别表示 K_2 的两个端点，令

$Q_1=K_2$，

$Q_2=K_2\times Q_1$，

⋮

$Q_k = K_2 \times Q_{k-1}, \quad k \geq 3,$

则称 Q_k 为 **k 方体图**.

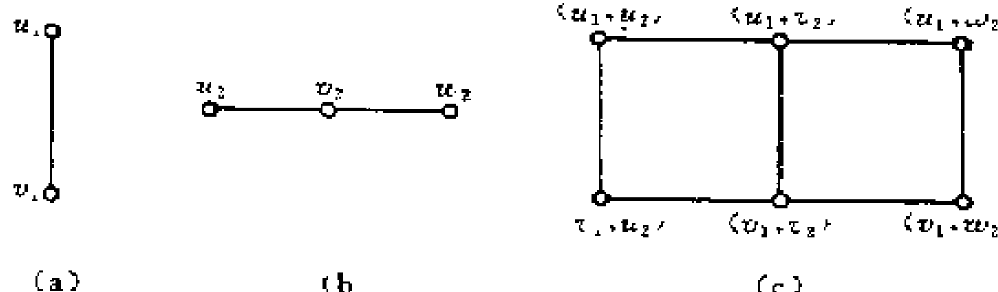


图 7.13

图 7.14 中给出了 1 方体图，2 方体图和 3 方体图.

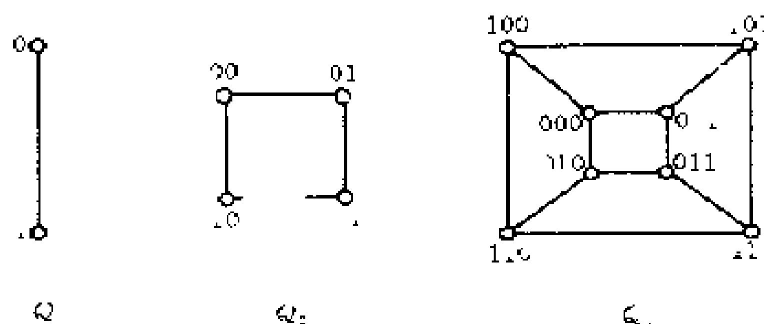


图 7.14

易知 Q_k 中有 2^k 个顶点，$k \cdot 2^{k-1}$ 条边.

§7.2 通路与回路

通路与回路是图论中两个重要的概念，在不同作者编写的书中，通路与回路又有不同的称呼. 本书中的有些概念对于有向图和无向图来说是很类似的，因而所下定义一般说来既适合无向图又适合有向图，差别较大的要加以说明或分开定义.

下面先给出无向图中通路与回路的定义.

定义 7.18 设 G 为无向标定图，G 中顶点与边的交替序列 $\Gamma = v_{i_0}e_{j_1}v_{i_1}e_{j_2}\cdots e_{j_l}v_{i_l}$ 称为顶点 v_{i_0} 到顶点 v_{i_l} 的**通路**，其中 $v_{i_{r-1}}, v_{i_r}$ 为 e_{j_r} 的端点，$r=1,2,\cdots,l$，v_{i_0}, v_{i_l} 分别称为 Γ 的**始点**和**终点**，Γ 中边数 l 称为 Γ 的长度. 若 $v_{i_0}=v_{i_l}$，则称通路 Γ 为**回路**.

若 Γ 的所有边各异，则称 Γ 为简单通路，此时，又若 $v_{i_0}=v_{i_l}$，则称 Γ 为**简单回路**.

若 Γ 的所有顶点(除 v_{i_0} 与 v_{i_l} 可能相同外)各异，所有边也各异，则称 Γ 为初级通路，或称 Γ 为一条路径，此时，又若 $v_{i_0}=v_{i_l}$，则称 Γ 为初级回路或圈，并将长度为奇数的圈称为奇圈，长度为偶数的圈称为偶圈.

注意，在初级通路与初级回路的定义中，仍将初级回路看成了初级通路的特殊情况，只是在应用中，初级通路(路径)多数是始点与终点不相同的.

若 Γ 中有边重复出现，则称 Γ 为**复杂通路**，又若此时有 $v_{i_0}=v_{i_l}$，则称 Γ 为**复杂回路**.

对于有向图中通路、回路及其分类的定义与以上的定义非常类似，只是要注意在有向图中通路与回路中有向边方向的一致性，即在 $\Gamma = v_{i_0}e_{j_1}v_{i_1}e_{j_2}\cdots e_{j_l}v_{i_l}$ 中，$v_{i_{r-1}}$ 必为 e_{j_r} 的始点，而 v_{i_r} 必为 e_{j_r} 的终点，$r=1,2,\cdots,l$，并且将初级回路也简称为圈.

在以上通路与回路的定义中，将回路定义成了通路的特殊情况，初级通路(回路)是简单通路(回路)，但反之不真.

在定义中，将通路(回路)表示成顶点与边的交替序列，其实还可以用以下简便方法表示通路与回路.

(1) 用边的序列表示通路(回路).

定义 7.18 中的 $\Gamma = v_{i_0}e_{j_1}v_{i_1}e_{j_2}\cdots e_{j_l}v_{i_l}$ 可以表示为 $e_{j_1}e_{j_2}\cdots e_{j_l}$.

(2) 在简单图中用顶点的序列表示通路(回路).

在简单图中，上述 Γ 既可以表示为 $e_{j_1}e_{j_2}\cdots e_{j_l}$，又可以表示为 $v_{i_0}v_{i_1}\cdots v_{i_l}$. 对于只标定顶点的简单图，当然是只用顶点序列表示更为方便.

(3) 为了写出非标定图中的通路(回路),应该将非标定图先标成标定图,或只标定所求通路(回路),然后再写出通路(回路).

(4) 将图中的通路(回路)在图外重新画出

在这种表示法中,长为 l 的圈,在同构的意义下表示法是唯一的,但在不是同构的意义下,即定义意义下,画出的长为 l 的圈表示 l 个不同的圈(因为不同始点(也是终点)的圈看成是不同的).

定义 7.19 在含圈的无向简单图 G 中,称 G 中最长圈的长度为 G 的**周长**,记作 $c(G)$,称 G 中最短圈的长度为 G 的**围长**,记作 $g(G)$.

无向完全图 $K_n(n\geqslant 3)$ 的周长为 n,围长为 3. 完全二部图 $K_{n,n}(n\geqslant 2)$ 的周长为 $2n$,围长为 4.

以下两个定理及其推论,对于无向图和有向图都是成立的,因而就一般的 n 阶图(有向的或无向的)进行讨论.

定理 7.6 在 n 阶图 G 中,若从顶点 v_i 到 $v_j(v_i\neq v_j)$ 存在通路,则从 v_i 到 v_j 存在长度小于等于 $(n-1)$ 的通路.

证明 设 $\Gamma=v_{i_0}e_{j_1}v_{i_1}e_{j_2}\cdots e_{j_l}v_{i_l}$ 为 G 中长度为 l 的通路,且始点 $v_{i_0}=v_i$,终点 $v_{i_l}=v_j$. 若 $l\leqslant n-1$,则 Γ 为满足要求的通路. 否则,即 $l>n-1\Rightarrow l+1>n$,也就是 Γ 上的顶点数大于 G 中的顶点数,于是,必存在 s,k, $0\leqslant s<k\leqslant l$,使得 $v_{i_s}=v_{i_k}$,即在 Γ 中存在 v_{i_s} 到自身的回路 C_{sk},在 Γ 上删除 C_{sk} 中的一切边及除 $v_{i_s}(=v_{i_k})$ 外的所有顶点,得 $\Gamma'=v_{i_0}e_{j_1}v_{i_1}e_{j_2}\cdots v_{i_s}e_{j_{k+1}}v_{i_{k+1}}\cdots e_{j_l}v_{i_l}$,则 Γ' 仍然为顶点 v_i 到顶点 v_j 的通路,且 Γ' 的长度比 Γ 的长度至少减少 1. 且若 Γ' 的长度 $l'\leqslant n-1$,则 Γ' 满足要求,否则对 Γ' 重复上述过程,因为 G 为有限图,经过有限步后,必得到 v_i 到 v_j 长度小于等于 $n-1$ 的通路.
▌

推论 在 n 阶图 G 中,若从顶点 v_i 到 $v_j(v_i\neq v_j)$ 存在通路,则 v_i 到 v_j 一定存在长度小于等于 $n-1$ 的路径.

证明 由定理 7.6 可知,v_i 到 v_j 存在长度小于等于 $n-1$ 的通路 Γ. 若 Γ 已经是路径,则 Γ 满足要求,否则必存在若干个始点

(终点)在Γ上的回路，删除这些回路上除始点(终点)外的一切顶点和所有边，其结果，Γ'为v_i到v_j的长度小于等于$n-1$的路径.

∎

定理 7.7 在n阶图G中，若存在v_i到自身的回路，则存在v_i到自身长度小于等于n的回路.

证明方法类似于定理 7.6.

推论 在一个n阶图G中，若存在v_i到自身的简单回路，则一定存在v_i到自身的长度小于等于n的初级回路(圈).

本推论的证明类似于定理 7.6 的推论.

在本推论中应该注意，若G是无向图，且v到自身存在回路，v到自身不一定存在圈.

下面介绍一种图论中很有用的证明方法，叫做"**扩大路径法**". 首先给出"**极大路径**"的概念.

设$G=\langle V,E\rangle$为n阶无向图，$E\neq\varnothing$，设$\Gamma=v_0v_1\cdots v_l$为G中一条路径. 若始点v_0与Γ外的某顶点相邻，就将该顶点及关联的边扩到Γ中来，若新路径的始点还与新的路径外的顶点相邻，就再将它及其关联的边扩到新的路径中来，得到更新的路径，继续这一过程，直到最后所得路径的始点不与其它所有路径外的任何顶点相邻为止. 设终止时的路径为$\Gamma_{l+k}=v_0v_1\cdots v_{l+k}$，$k\geq 0$. 再对$\Gamma_{l+k}$的终点$v_{l+k}$继续上述过程，设最终得到的路径为$\Gamma_{l+k+r}=v_0v_1\cdots v_{l+k+r}$，$k,r\geq 0$，它的始点$v_0$与终点$v_{l+k+r}$不与$\Gamma_{l+k+r}$外的任何顶点相邻，则称$\Gamma_{l+k+r}$为"极大路径"，并称用构造"**极大路径**"证明定理或命题的方法为"扩大路径法".

类似地，可以在有向图D中构造"极大的路径"，只需注意，当从路径的始点v_0扩大时，需要找Γ外的邻接到v_0的顶点，而从路径的终点v_l扩大时，需要找Γ外的邻接于v_l的顶点.

【例 7.6】 设G为$n(n\geq 3)$阶无向简单图，$\delta(G)\geq 2$，证明G中存在长度大于等于3的圈.

证明 设$v_0\in V(G)$，由于$\delta(G)\geq 2$，所以存在$v_1\in V(G)$且v_1

$\neq v_0$，使得$(v_0,v)\in E(G)$. 设$\Gamma_0=v_0v$，对Γ_0采用"扩大路径法"，得"极大路径"如下，$\Gamma=v_0v_1v_2\cdots v_l$. 由于$G$为简单图及$d(v_i)\geqslant 2(i=1,2)$可知，$l\geqslant 2$.

(1) 若在Γ中，v_0与v_l相邻，则$v_0v_1v_2\cdots v_lv_0$为G中长度大于等于3的圈.

(2) 若v_0与v_l不相邻，则必存在$v_i(2\leqslant i\leqslant l-1)$，使得$v_0$与$v_i$相邻，否则与$d_G(v_0)\geqslant 2$相矛盾. 于是得初级回路(圈)$v_0v_1\cdots v_{i-1}v_iv_0$，并且长度大于等于3.

【例7.7】 设$D=<V,E>$为有向简单图，$\delta(D)\geqslant 2$，且$\delta^-(D)>0$，$\delta^+(D)>0$，证明D中存在长度大于等于$\max\{\delta^-(D),\delta^+(D)\}+1$的圈(初级回路).

证明 设v_0为D中任意一个顶点，由于$d^+(v_0)\geqslant\delta^+$因而存在$v_1\in V(D)$，使得$<v_0,v_1>\in E(D)$，令$\Gamma_0=v_0v_1$，对$\Gamma_0$施行"扩大路径法"，得"极大路径"，$\Gamma=v_0v_1\cdots v_l$，由已知条件可知，$l\geqslant\max\{\delta^-,\delta^+\}$.

(1) 若$\max\{\delta^-,\delta^+\}=\delta^+$，则$l\geqslant\delta^+$.

在Γ中，若v_l邻接到v_0，即$<v_l,v_0>\in E(D)$，则$v_0v_1v_2\cdots v_lv_0$为长度大于等于δ^++1的圈，否则，即$<v_l,v_0>\notin E(D)$，由于v_l不邻接到Γ外的任何顶点，因而在Γ上存在$v_{i_1},v_{i_2},\cdots,v_{i_r}$邻接于$v_l$，$1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_r=d^+(v_l)(d^+(v_l)\geqslant\delta^+)$. 于是，$v_{i_1}\cdots v_{i_2}\cdots v_{i_r}\cdots v_lv_{i_1}$为长度大于等于$\delta^++1$的圈(见图7.15所示).

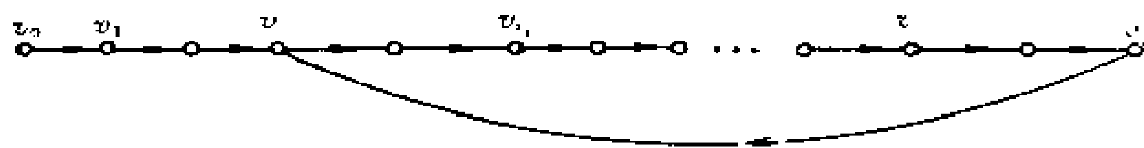


图 7.15

(2) 若$\max\{\delta^-,\delta^+\}=\delta^-$，可类似讨论.

§7.3 无向图的连通性

本节内所讨论的图均为无向图，因而所述图 G 均指无向图.

定义 7.20 设 $G=<V,E>$，$\forall u,v\in V$，若 u,v 之间存在通路，则称 u,v 是**连通的**，记作 $u\sim v$，并且对于 $\forall u\in V$，规定 $u\sim u$.

由定义不难看出，无向图中顶点之间的**连通关系**是等价关系.

定义 7.21 若 G 为平凡图或 G 中任何两个顶点都是连通的，则称 G 是**连通图**，否则称 G 是**非连通图**或**分离图**.

显然无向完全图 $K_n(n\geqslant 1)$ 都是连通图，而零图 $N_n(n\geqslant 2)$ 均为非连通图.

定义 7.22 设 $G=<V,E>$ 中，V 关于顶点之间的连通关系的商集，$V/\sim=\{V_1,V_2,\cdots V_k\}$，称导出子图 $G[V_i](i=1,2,\cdots,k)$ 为 G 的**连通分支**，连通分支数 k 记为 $p(G)$.

由定义可知，若 G 为连通图，则 $p(G)=1$，若 G 为非连通图，则 $p(G)\geqslant 2$.

定义 7.23 设 u,v 为图 G 中的任意两个顶点，若 u,v 连通，称 u,v 之间长度最短的通路为 u,v 之间的**短程线**，短程线的长度称为 u,v 之间的**距离**，记作 $d(u,v)$，当 u,v 不连通时，规定 $d(u,v)=\infty$.

不难看出，G 中顶点之间的距离有如下各条性质：

(1) $d(u,v)\geqslant 0$，$u=v$ 时，等号成立；

(2) 满足三角不等式：$\forall u,v,w\in V(G)$，则 $d(u,v)+d(v,w)\geqslant d(u,w)$；

(3) 具有对称性：$d(u,v)=d(v,u)$.

定义 7.24 设图 $G=<V,E>$，称

$$\max\{d(u,v)\mid u,v\in V\}$$

为 G 的**直径**，记作 $d(G)$.

易知，若 $G=K_n(n\geqslant 2)$，则 $d(G)=1$，若 G 是长度为 n 的圈，

则 $d(G)=\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$，若 G 是平凡图，则 $d(G)=0$，若 G 是零图 $N_n(n\geq 2)$，则 $d(G)=\infty$.

有了图中通路、回路及连通图的概念后，我们可以给出二部图的一个判别定理.

定理 7.8 一个图 G 为二部图当且仅当图 G 中无奇圈.

证明 必要性. 设二部图 $G=<V_1,V_2,E>$，若 G 中无圈，结论成立，否则，设 C 为 G 中任意一个圈，设 $C=v_1v_2\cdots v_{l-1}v_lv_1$，不妨设 $v_1\in V_1$，则 $v_1,v_3,\cdots,v_{l-1}$ 均属于 V_1，而 $v_2,v_4,\cdots,v_l$ 均属于 V_2，于是 l 为偶数，且 l 为 C 的长度，因而 C 为偶圈. 由于 C 的任意性，所以结论成立.

充分性. 设 G 中无奇圈，不妨设 G 是连通的，否则可对它的每个连通分支进行讨论. 设 v 为 G 中任意一个顶点，令

$$V_1=\{u\mid u\in V(G)\wedge d(u,v)\text{为偶数}\},$$

$$V_2=\{u\mid u\in V(G)\wedge d(u,v)\text{为奇数}\},$$

则 $V_1\cap V_2=\varnothing$ 且 $V_1\cup V_2=V(G)$. 下面只要证明，$\forall e\in E(G)$，则 e 的一个端点在 V_1 中，另一个端点在 V_2 中. 若不然，存在边 $e=(v_x,v_y)$，v_x,v_y 均属于 V_1，设 Γ_{vx},Γ_{vy} 分别为 v 到 v_x 和 v 到 v_y 的短程线，显然 Γ_{vx},Γ_{vy} 的长度均为偶数. 设 $v_z\in V(\Gamma_{vx})\cap V(\Gamma_{vy})$，且 Γ_{zx} 与 Γ_{zy} 除 v_z 外无公共顶点（示意图请见图 7.16），则因 Γ_{zx},Γ_{zy} 的长度依然为偶数，所以 $\Gamma_{zx}\cup(v_x,v_y)\cup\Gamma_{zy}$ 为 G 中一个奇圈，这与 G 中无奇圈矛盾. ∎

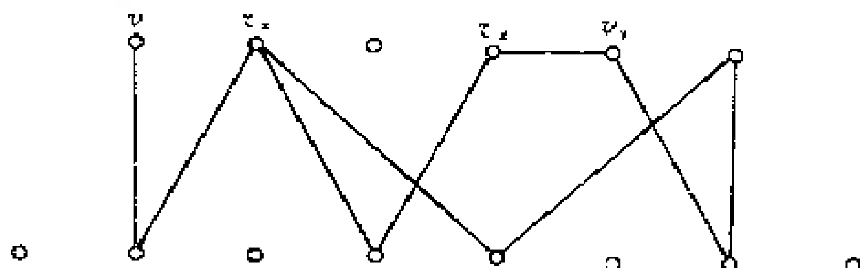


图 7.16

定理 7.9 设 G 为 n 阶无向图，若 G 是连通图，则 G 的边数 $m \geqslant n-1$.

证明 若 G 为简单图时，G 连通必有 $m \geqslant n-1$，当 G 为非简单图时，G 连通更要要求 $m \geqslant n-1$，因而下面仅就 G 为简单图时加以证明.

对顶点数 n 作归纳法.

$n=1$ 时，G 为平凡图，此时 $m=0$，所以结论成立.

设 $n<k(k \geqslant 1)$ 时结论成立，下面证明 $n=k+1$ 时结论也成立.

设 v 为 G 中任意一个顶点，记 $G'=G-v$，设 G' 有 $s(s \geqslant 1)$ 个连通分支 $G_1,G_2,\cdots G_s$，设 $|V(G_i)|=n_i$，$|E(G_i)|=m_i$，$i=1,2,\cdots,s$，则 $n_i<k$，由归纳假设可知 $m_i \geqslant n_i-1$. 由于从 G 中删除 v 产生 s 个连通分支，所以至少同时删除了 s 条边，于是，$m \geqslant \sum_{i=1}^{s} m_i + s \geqslant \sum_{i=1}^{s} n_i - s + s = \sum_{i=1}^{s} n_i = n-1$. ∎

§7.4 无向图的连通度

为了刻化连通图的“连通程度”，先给出点割集和边割集的概念. 本节内所谈图 G 也均指无向图.

定义 7.25 设 $G=\langle V,E\rangle$，若存在 $V' \subset V$ 且 $V' \neq \varnothing$，使得 $p(G-V')>p(G)$，而对于任意的 $V'' \subset V'$，均有 $p(G-V'')=p(G)$，则称 V' 是 G 的**点割集**. 特别地，若 V' 是 G 的点割集，且 V' 是单元集，即 $V'=\{v\}$，则称 v 为**割点**.

在图 7.17 中，$\{v_2,v_7\}$，$\{v_3\}$，$\{v_4\}$ 为点割集，其中 v_3,v_4 均为割点.

定义 7.26 设 $G=\langle V,E\rangle$，若存在 $E' \subset E$ 且 $E' \neq \varnothing$，使得 $p(G-E')>p(G)$，而对于任意的 $E'' \subset E'$，均有 $p(G-E'')=p$

(G)，则称 E' 为 G 的**边割集**或简称为**割集**. 特别地，若 E' 是割集，且 E' 为单元集，即 $E'=\{e\}$，则称 e 为**桥**.

在图 7.17 中，$\{e_1,e_2\}$，$\{e_1,e_3,e_4\}$，$\{e_6\}$，$\{e_7,e_8\}$，$\{e_2,e_3,e_4\}$ 等都是割集，其中 e_6 是桥.

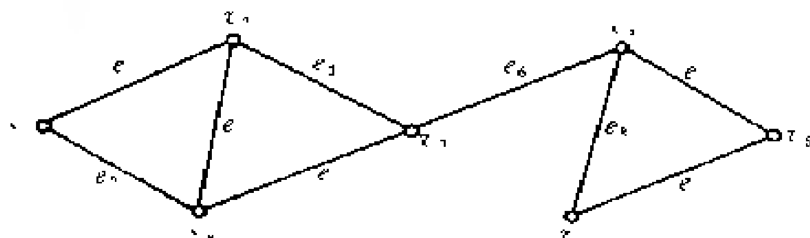


图 7.17

对于任意的 $v\in V(G)$，$I_G(v)$ 是 v 的关联集，E' 为 G 的割集，若 $E'\subseteq I_G(v)$，则称 E' 为 v 产生的**扇形割集**，简称扇形割集. 其实，若 v 不是割点，则 $I_G(v)$ 本身就为扇形割集，在图 7.17 中，$\{e_1,e_2\}$ 是由 v_1 产生的扇形割集，$\{e_2,e_4,e_5\}$ 是由 v_2 产生的扇形割集. $E_v'=\{e_4,e_5,e_6\}$ 不是割集，它含两个扇形割集，即 $\{e_4,e_5\}$ 和 $\{e_6\}$.

定义 7.27 设 G 为无向连通图且为非完全图，则称 $\kappa(G)=\min\{|V'|\,|\,V'$ 为 G 的点割集$\}$ 为 G 的**点连通度**，简称连通度. 规定完全图 K_n 的点连通度为 $n-1$，$n\geq1$. 又规定非连通图的点连通度为 0. 又若 $\kappa(G)\geq k$，则称 G 为 **k 连通图**.

不难看出，图 7.17 所示的图的点连通度为 1，它为 1 连通图，但不是 k 连通图，$k\geq2$. 彼得森图(图 7.6(d)所示)的点连通度为 3，所以它是 1 连通图，2 连通图，3 连通图，但不是 k 连通图，$k\geq4$.

定义 7.28 设 G 是无向连通图，称 $\lambda(G)=\min\{|E'|\,|\,E'$ 是 G 的边割集$\}$ 为 G 的**边连通度**. 规定非连通图的边连通度为 0. 又若 $\lambda(G)\geq k$，则称 G 为 **k 边-连通图**.

不难看出图 7.17 所示图的边连通度 $\lambda=1$，因而该图只是 1

边-连通图. 彼得森图的边连通图为 3, 因而它是 1 边-连通图、2 边-连通图、3 边-连通图, 但不是 k 边-连通图, $k\geqslant 4$.

在不引起混淆的情况下, 图 G 的点连度 $\kappa(G)$, 边连通度 $\lambda(G)$, 可分别记为 κ 和 λ.

定理 7.10(Whitney) 对于任意的图 G, 均有下面不等式成立:

$$\kappa\leqslant\lambda\leqslant\delta,$$

其中 κ,λ,δ 分别为 G 的点连通度、边连通度和最小度.

证明 若 G 是非连通图或 G 是完全图, 结论显然成立. 又若 G 是非简单图, 删除 G 中全部环, 并将重数 r 大于等于 2 的平行边均删除 $r-1$ 条, 设所得图为 G', 则 G' 为简单图. 显然, 若有 $\kappa(G')\leqslant\lambda(G')\leqslant\delta(G')$, 则必有 $\kappa(G)\leqslant\lambda(G)\leqslant\delta(G)$. 基于以上理由, 设 G 是连通的、非完全的简单图, 对满足以上要求的简单图来说, 阶数 $n=1$ 或 2 的情况结果成立, 所以设 G 的阶数 $n\geqslant 3$. 下面的证明分两步.

(1) 证 $\lambda\leqslant\delta$.

设 $v\in V(G)$ 且 $d_G(v)=\delta(G)$, 令 $E_v'=\{(u,v)\mid u\in N_G(v)\}$, 则 E_v' 中必含 G 的割集, 所以

$$\lambda(G)\leqslant|E_v'|=\delta(G)\Rightarrow\lambda\leqslant\delta.$$

(2) 证 $\kappa\leqslant\lambda$.

设 E' 为 G 的一个边割集, 且 $\lambda=|E'|$, 我们的目的是要从 E' 中的边关联的顶点中找出含点割集的 V' 来, 使得 $p(G-V')>p(G)$. 为此, 令 $G'=G-E'$, 设 G' 的两个连通分支分别为 G_1 和 G_2, 则 E' 中的边的两个端点在 G_1 中, 另一个在 G_2 中, 为了使选到的 V' 满足上述要求, 先证明下面命题:

存在 $u\in V(G_1)$, $v\in V(G_2)$, 使得 u,v 在 G 中不相邻, 记此命题为(*).

设 $|V(G_1)|=n_1$, $|V(G_2)|=n_2$, 则 $n_1+n_2=n$ 且 $1\leqslant n_i\leqslant n-1$, $i=1,2$, 若(*)不成立, 则 $\lambda(G)=|E'|\geqslant n_1n_2\geqslant n-1$, 这矛盾于 G 是

非完全图的简单图，所以(*)成立. 上式中 $n_1n_2\geq n-1$ 的理由如下：

$$n_1n_2-n+1=n_1n_2-n_1-n_2+1=n_1(n_2-1)-(n_2-1)$$
$$=(n_1-1)(n_2-1)\geq 0.$$

按下面方法选择 V'：$\forall e\in E'$，均选一个异于 u,v 的端点(由(*)的成立，这是办得到的)组成 V'，则 $G-V'$ 至少有两个连通分支，一个含 u，另一个含 v，所以 V' 中必含点割集. 于是

$$k(G)\leq|V'|\leq|E'|=\lambda(G)\Rightarrow k\leq\lambda$$

推论 若 G 是 k-连通图，则 G 必为 k 边-连通图.

定理 7.11 设 G 是 $n(n\geq 6)$ 阶简单无向连通图，$\lambda(G)<\delta(G)$，则必存在由 K_{n_1}，K_{n_2} 及在它们之间适当地连入 $\lambda(G)$ 条边含 G 作为生成子图的图 G^*，其中，$\lambda(G)+2\leq n_1\leq\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$.

证明 设 E_1 是 G 中的一个最小的边割集，则 $|E_1|=\lambda(G)$，于是 $G-E_1$ 恰有两个连通分支 G_1，G_2，设 n_1，n_2 分别为 G_1 与 G_2 的顶点数，则 $n_1+n_2=n$，不妨设 $n_1\leq n_2$. 在 G_1 与 G_2 中适当地加新边，使其成为完全图 K_{n_1}，K_{n_2}. 令 $G^*=K_{n_1}\cup E_1\cup K_{n_2}$，则 G^* 为所求，它含 G 作为生成子图是显然的. 下面只需证明 $\lambda(G)+2\leq n_1\leq\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$. 由 G^* 的构造不难看出.

$$\lambda(G)<\delta(G)\leq\delta(G^*)\leq n_1-1+\left\lfloor\frac{\lambda(G)}{n_1}\right\rfloor$$
$$\Rightarrow\lambda(G)<n_1-1+\frac{\lambda(G)}{n_1}\Leftrightarrow(n_1-1)(n_1-\lambda(G))>0$$
$$\Rightarrow\lambda(G)<n_1\Rightarrow\lambda(G)\leq n_1-1\Rightarrow\lambda(G)+1\leq n_1$$

而当 $\lambda(G)+1=n_1$ 时，$n_1-1+\left\lfloor\frac{\lambda(G)}{n_1}\right\rfloor=\lambda(G)$，于是有

$$\lambda(G)<\delta(G)\leq\delta(G^*)\leq\lambda(G),$$

这是矛盾的，因而 $\lambda(G)+1<n_1\Rightarrow\lambda(G)+1\leq n_1-1\Rightarrow\lambda(G)+2\leq n_1$，至于 $n_1\leq\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ 是显然的，所以 $\lambda(G)+2\leq n_1\leq\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$. ▌

由定理 7.11 的证明，不难证明以下推论.

推论

(1) $\delta(G)\leqslant\delta(G^*)\leqslant n_1-1<\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1$;

(2) G^* 中存在不相邻的顶点 u,v,使得

$$d_{G^*}(u)+d_{G^*}(v)\leqslant n-2;$$

(3) $d(G)\geqslant d(G^*)\geqslant 3$.

定理 7.12 设 G 是 $n(n\geqslant 6)$阶连通简单无向图.

(1) 若 $\delta(G)\geqslant\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$,则 $\lambda(G)=\delta(G)$;

(2) 若对于 G 中任意一对不相邻的顶点 u,v,均有

$$d(u)+d(v)\geqslant n-1,$$

则 $\lambda(G)=\delta(G)$;

(3) 若 $d(G)<2$,则 $\lambda(G)=\delta(G)$.

证明 (1) 由定理 7.10 可知,$\lambda(G)\leqslant\delta(G)$,而若 $\lambda(G)<\delta(G)$,由定理 7.11 的推论可知,$\delta(G)<\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1$,这与 $\delta(G)\geqslant\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ 相矛盾,所以必有 $\lambda(G)=\delta(G)$.

(2) 若 $\lambda(G)<\delta(G)$,由定理 7.10 中构造的 G^* 中存在不相邻的顶点 u,v,使得

$$d_{G^*}(u)+d_{G^*}(v)<n-2,$$

但 $d_G(u)\leqslant d_{G^*}(u)$,$d_G(v)<d_{G^*}(v)$,于是得

$$d_G(u)+d_G(v)<n-2,$$

这矛盾于已知条件,所以必有 $\lambda(G)=\delta(G)$.

(3) 由定理 7.11 的推论中的(3)得证 ▌

定理 7.13 设 G 是 n 阶简单连通图,且 G 不是完全图 K_n,则

$$\kappa(G)\geqslant 2\delta(G)-n+2.$$

证明 设 V_1 是 G 的最小点割集,则 $|V_1|=\kappa(G)$. 设 $G-V_1$ 的连通分支为 $G_1,G_2,\cdots,G_s(s\geqslant 2)$,并设 $|V(G_1)|=n_1$,$\left|\bigcup_{i=2}^{s}V(G_i)\right|=n_2$,则 $n_1+n_2+\kappa(G)=n$,于是应该有

$$\delta(G)\leqslant n_1-1+\kappa(G)=n_1+\kappa(G)-1,$$

并且

$$\delta(G)\leqslant n_2+\kappa(G)-1,$$

$$\Rightarrow 2\delta(G)\leqslant n_1+n_2+\kappa(G)+\kappa(G)-2=n+\kappa-2$$

$$\Rightarrow \kappa(G)\geqslant 2\delta(G)-n+2. \quad ▌$$

定理 7.14 对于给定的正整数 n,δ,κ,λ，存在 n 阶简单连通无向图 G，使得 $\delta(G)=\delta,\kappa(G)=\kappa,\lambda(G)=\lambda$ 的充分必要条件是下列三式之一成立：

(1) $0<\kappa\leqslant\lambda\leqslant\delta<\left\lfloor\dfrac{n}{2}\right\rfloor$；

(2) $1\leqslant 2\delta-n+2\leqslant\kappa\leqslant\lambda=\delta<n-1$；

(3) $\kappa=\lambda=\delta=n-1$.

证明 必要性.

当 $\delta<\left\lfloor\dfrac{n}{2}\right\rfloor$ 时，由定理 7.10 可知(1)成立.

当 $\delta\geqslant\left\lfloor\dfrac{n}{2}\right\rfloor$ 时，由定理 7.12 可知，$\lambda=\delta$. 又若 G 不是完全图 K_n，由定理 7.13 可知，

$$1\leqslant 2\delta-n+2\leqslant\kappa\leqslant\lambda=\delta<n-1.$$

而当 G 为完全图 K_n 时，$\kappa=\lambda=\delta=n-1$.

充分性.

设(1)中条件成立. 取 $G_1=K_{\delta+1},G_2=K_{n-\delta-1}$. 设 $V(G_1)=\{u_1,u_2,\cdots,u_{\delta+1}\}$，$V(G_2)=\{v_1,v_2,\cdots,v_{n-\delta-1}\}$，在 $G_1\cup G_2$ 中增加新边 (u_i,v_i)，$i=1,2,\cdots,\kappa$，及新边 (u_1,v_i)，$i=2,3,\cdots,(\lambda-k+1)$，记所得图为 G，则 $\delta(G)=\delta,\kappa(G)=\kappa,\lambda(G)=\lambda$. $n=11,\kappa=2,\lambda=3,\delta=4$ 时，所得图 G 如图 7.18 所示.

设(2)中条件成立. 令 $G_1=K_\kappa,G_2=K_r,G_3=K_s$，其中，$r=\left\lfloor\dfrac{n-k}{2}\right\rfloor$，$s=\left\lfloor\dfrac{n-k-1}{2}\right\rfloor$，取 $G'=G_1+(G_2\cup G_3)$，在 G' 中增加一个顶点 v，使 v 与 G_1 中所有顶点相邻，与 G_3 中 $\delta-k$ 个顶点相邻，记最后所得图为 G，则 G 满足条件：$\delta(G)=\delta,\kappa(G)=\kappa,\lambda(G)=\lambda$.

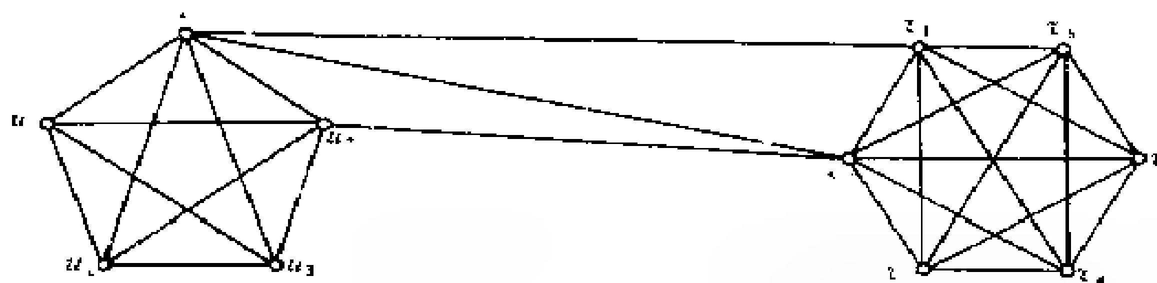


图 7.18

取 $n=8$, $\kappa=2$, $\lambda=\delta=4$. 则 $G_1=K_2$, $r=\left\lfloor\frac{8-2}{2}\right\rfloor=3$, $s=\left\lfloor\frac{8-2-1}{2}\right\rfloor=2$, 所以取 $G_2=K_3$, $G_3=K_2$, $G'=G_1+(G_2\cup G_3)=K_2+(K_3\cup K_2)$, 所得图 G 为图 7.19 所示.

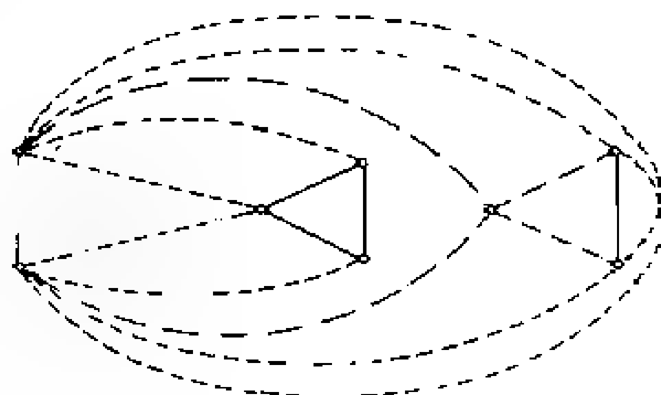


图 7.19

在图 7.19 中, 实线边组成的图分别为 K_2, K_3, K_2, 虚线边是由 K_2, $K_3\cup K_2$ 形成联图 G' 时所加的边, 而线段和点组成的边是由 G' 构造 G 时增加的边.

设(3)成立, 则令 $G=K_n$ 即满足要求. ▌

下面讨论无割点与无桥图的特点.

定理 7.15(Whitney) 设 G 为 $n(n\geqslant 3)$ 阶无向连通图, G 为 2 连通图当且仅当 G 中任意两个顶点共圈.

证明 先证充分性. 因为 G 中任意两个顶点共圈, 所以 G 中

任意的顶点均在若干个圈上，因而$\forall v\in V(G)$，$G-v$仍连通，故G中无割点，所以$\kappa(G)\geqslant 2$，因而G是2连通的.

必要性. 设u,v为G中任意两个顶点，为证明u,v共圈，对u,v之间的距离$d(u,v)$作归纳法.

当$d(u,v)=1$时，边$e=(u,v)\in E(G)$，由已知条件可知，$\lambda(G)\geqslant\kappa(G)\geqslant 2$，故$e$不是桥，因而$G'=G-e$仍连通，于是在$G'$中$u,v$之间存在路径$\Gamma$，$\Gamma\cup e$为$G$中一个圈，此圈含$u,v$.

设$d(u,v)\leqslant k(k\geqslant 1)$时结论成立，下面证明$d(u,v)=k+1$时结论也成立.

设P为u,v之间的短程线，则P的长度为$k+1$. 在P上设w与v相邻，则$P-(w,v)$为u,w之间的短程线，其长度为k，即$d(u,w)=k$，由归纳假设可知，u,w共圈，设其圈由Γ_1、Γ_2所围，其示意图为图 7.20(a). 因为G是2连通图，因而$G'=G-w$仍连通，故在G'中u到v存在路径Γ_3，且Γ_3与Γ_1以及Γ_2不会全重合，可分以下几种情况讨论：

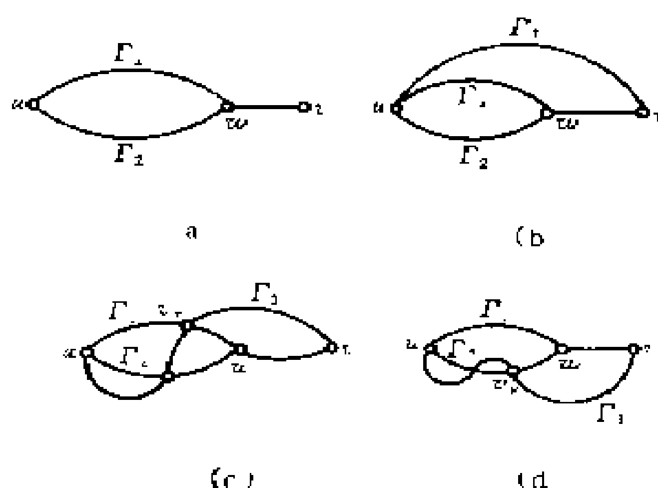


图 7.20

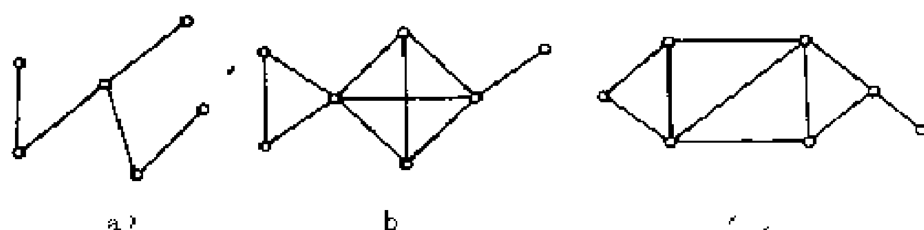
若除u外，Γ_3与Γ_1、Γ_2无其它公共顶点，则u,v处于圈$\Gamma_1\cup(w,v)\cup\Gamma_3$中，其示意图为图 7.20(b).

否则，Γ_3与Γ_1或Γ_2有公共顶点. 若Γ_3与Γ_1有公共顶点，设

v_x是Γ_1最靠近w的与Γ_3的公共顶点，则u,v处于由Γ_1上u到v_x的一段、Γ_3上v_x到v的一段、边(w,v)、Γ_2所组成的圈上，示意图为图7.20(c). 若Γ_3与Γ_1无公共顶点，设v_y是Γ_2上最靠近w的与Γ_3的公共顶点，则u,v处于由Γ_2上u到v_y的一段、v_y到v的Γ_3上的一段，边(w,v)以及Γ_1所围成的圈上，示意图为图7.20(d). ∎

定义 7.29 设G为无向连通图，若G中无割点，则称G为**块**. 若G中有割点，则称G中成块的极大连通子图为G的块.

图7.21(a)中有5个块，它们都是K_2，(b)中有3个块，它们分别为K_2，K_3和K_4. (c)中有2个块，其中有一个是K_2.



a)　　b

图 7.21

由定理7.15可知，对于$n(n\geqslant 3)$阶的无向图G，若G是块，则G中任意两个顶点共圈，反之，若G中任意两个顶点共圈，则G是块.

定理 7.16 设G为$n(n\geqslant 3)$阶无向图，G为2边-连通图当且仅当G中任何两个顶点共简单回路.

证明 必要性. 设G有$r(r\geqslant 1)$个块：$G_1,G_2,\cdots,G_r$. $\forall\, u,v\in V(G)$，若u,v在G的同一个块$G_i(1\leqslant i<r)$中，由定理7.15可知，u,v共圈，因而共简单回路，否则，设$u\in V(G_i)$，$v\in V(G_j)$，$1<i<j<r$. 设u与v之间的短程线为P，易知，P必经过若干个块与块之间的割点$v_{i_1},v_{i_2},\cdots,v_{i_s}$，见图7.22所示的示意图. 由定理7.15可知，u与v_{i_1}共圈，设C_1是其中的一个，v_{i_1}与v_{i_2}共圈，设C_2是其中的一个，$\cdots$，v_{i_s}与v共圈，设C_s是其中的一个，于是u,v共简单回路$u\cdots v_{i_1}\cdots v_{i_2}\cdots v_{i_s}\cdots v_{i_2}\cdots v_{i_1}\cdots u$.

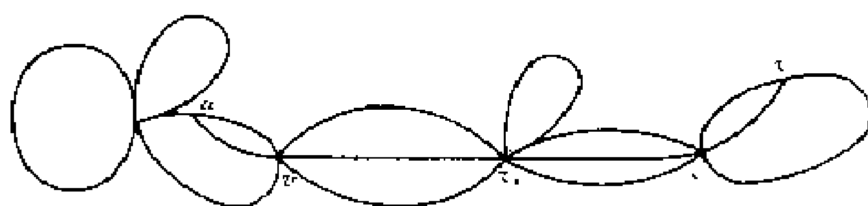


图 7.22

充分性．其实，只要证明 G 中无桥．若 G 中有桥，设 $e=(u,v)$ 为其中的一桥，由已知条件可知 u,v 共简单回路，设 C 是其中的一个简单回路，则 $G-e$ 连通，这与 e 为 G 中桥相矛盾． ∎

由定理 7.16 可知，$n(n\geqslant 3)$阶无向图 G 中无桥当且仅当 G 中任意二顶点共简单回路．

由以上的讨论可知，割点、桥和块都是图的关键部位，下面进一步讨论有割点和有桥图的一些特点．

定理 7.17 设 v 为无向连通图 G 中的一个顶点，v 为 G 的割点当且仅当存在 $V(G)-v$ 的一个划分：$V(G)-v=V_1\cup V_2$，使得对于任意的 $u\in V_1$，任意的 $w\in V_2$，v 在每一条 u 到 w 的路径上．

证明 必要性．因为 v 为 G 的割点，所以，$G-v$ 至少有两个连通分支，设 G_1 为其中的一个连通分支，取 $V_1=V(G_1)$，$V_2=V(G)-\{v\}-V_1$，则 $V_1\cap V_2=\varnothing$，$V_1\cup V_2=V(G)-v$，所以 V_1，V_2 为 $V(G)-v$ 的一个划分．则$\forall u\in V_1$，$\forall w\in V_2$，v 必在每一条从 u 到 v 的路径上，否则，存在某条从 u 到 w 的路径 P 不含 v，则 P 在 $G-v$ 中，这与 u,w 属于 $G-v$ 的不同连通分支相矛盾．

充分性．若 v 不是割点，则 $G-v$ 连通，因而存在 $u\in V_1$，$w\in V_2$，存在 u 到 v 的路径不过 v，这与已知事实矛盾． ∎

推论 设 v 为无向连通图 G 中的一个顶点，v 为割点当且仅当存在与 v 不同的两个顶点 u 和 w，使 v 处在每一条从 u 到 w 的路径上．

定理 7.18 设 e 为无向连通图 G 中的一条边，e 是 G 的桥当且仅当 e 不在 G 中的何任圈上．

本定理的证明简单．

定理 7.19 设 e 为无向连通图 G 中的一条边，e 为桥当且仅当存在 $V(G)$ 的一个划分：$V(G)=V_1 \cup V_2$ 使得对于任意的 $u \in V_1, v \in V_2$，e 在每一条 u 到 v 的路径上.

证明 必要性. 因为 e 为 G 中桥，所以 $G-e$ 有两个连通分支 G_1, G_2，取 $V_1=V(G_1), V_2=V(G_2)$，则 $\{V_1, V_2\}$ 为 $V(G)$ 的一个划分. $\forall u \in V_1, \forall v \in V_2$，$e$ 在每一条从 u 到 v 的路径上. 否则，$\exists u_1 \in V_1, \exists v_1 \in V_2$，存在 u_1 到 v_1 的路径不过 e，则 $G-e$ 连通，这与 e 为 G 中桥相矛盾.

充分性. 设 $\{V_1, V_2\}$ 为 $V(G)$ 的一个划分，$\forall u \in V_1, \forall v \in V_2$，$e=(u', v')$ 在每一条从 u 到 v 的路径上，显然 $u' \in V_1, v' \in V_2$，若 e 不是桥，则 $G-e$ 仍然连通，于是存在从 u' 到 v' 的路径 P'，显然在 G 中，P' 不经过 e，这与已知事实矛盾. ▌

根据以上的讨论，不难证明下面定理.

定理 7.20 设 G 为 $n(n \geqslant 3)$ 阶无向简单连通图，则下面命题是等价的：

(1) G 是块；

(2) G 中任意二顶点共圈；

(3) G 中任意一个顶点与任意一条边共圈.

(4) G 中任意两条边共圈；

(5) 任给 G 中两个顶点 u, v 和一条边 e，存在从 u 到 v 经过 e 的路径；

(6) 对于 G 中的任意 3 个顶点中的两个顶点，都存在从一个顶点到另一个顶点且含第 3 个顶点的路径；

(7) 对于 G 中任意 3 个顶点中的任意两个顶点，都存在从一个顶点到另一个顶点而不含第 3 个顶点的路径.

在实际应用中，人们希望寻找 $n(n \geqslant 3)$ 阶无向简单图 G，使 G 是 k 连通的，且边数越少越好，当 $k=1$ 时，这样的图应该为 n 阶树. 当 $k=2$ 时，这样的图应该是 n 阶圈，$n=6, k=3$ 时，这样的图应该为 $K_{3,3}$，$k=4$ 时，这样的图应为八面体图. 一般情况下，对于

给出的 n 和 k,求 n 阶 k 连通简单图,使其边数达到最小是个难题.

§7.5 有向图的连通性

定义 7.30 在有向图 D 中,若从顶点 v_i 到 v_j 存在通路,则称 v_i **可达** v_j,记作 $v_i \to v_j$,对于任意的 $v_i \in V(D)$,规定 $v_i \to v_i$. 若 $v_i \to v_j$ 且 $v_j \to v_i$,则称 v_i 与 v_j **相互可达**,记作 $v_i \leftrightarrow v_j$,对于任意的 $v_i \in V(D)$,规定 $v_i \leftrightarrow v_i$.

不难看出,二元关系 $\leftrightarrow$ 是 $V(D)$ 上的等价关系.

定义 7.31 在有向图 D 中,若 $v_i \to v_j$,称 v_i 到 v_j 长度最短的通路为 v_i 到 v_j 的**短程线**,其长度称为 v_i 到 v_j 的**距离**,记作 $d\langle v_i, v_j \rangle$.

与无向图中顶点 v_i 与 v_j 之间的距离 $d(v_i, v_j)$ 相比,$d\langle v_i, v_j \rangle$ 除无对称性外,具有 $d(v_i, v_j)$ 的一切性质.

定义 7.32 设 D 为一个有向图. 若 D 的基图是连通图,则称 D 是**弱连通图**,或简称 D 是连通图,对于任意的 $v_i, v_j \in V(D)$,若 $v_i \to v_j$,$v_j \to v_i$ 至少成立其一,则称 D 是**单向连通的**. 对于任意的 $v_i, v_j \in V(D)$,若均有 $v_i \leftrightarrow v_j$,则称 D 是**强连通的**.

从定义不难看出,若 D 是强连通的,则它一定是单向连通的,若 D 是单向连通的,则它一定是弱连通的.

定理 7.21 设 D 为一个 n 阶有向图,D 是强连通的当且仅当 D 中存在回路,它经过 D 中每个顶点至少一次.

证明 充分性是显然的,下面证明必要性. 设 D 中的顶点为 $v_1, v_2, \cdots, v_n$. 由 D 的强连通性质可知,$v_i \to v_{i+1}$,$i=1,2,\cdots,n-1$,设 Γ_i 为 v_i 到 v_{i+1} 的通路,又 $v_n \to v_1$,设 Γ_n 为 v_n 到 v_1 的通路,于是,$\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_{n-1}, \Gamma_n$ 所围回路经过 D 中每个顶点至少一次.
∎

定理 7.22 设 D 为 n 阶有向图,D 是单向连通图当且仅当 D

中存在经过每个顶点至少一次的通路.

在证明本定理之前先证下面命题.

命题 设 D 是单向连通的有向图,则对于任意的 $V'\subset V(D)$,存在 $v'\in V'$,使得任意的 $v\in V'$,均有 $v'\to v$.

证明 若不然,必存在无此种性质的 $V(D)$ 的子集,设 $\tilde{V}=\{v_{i_1},v_{i_2},\cdots,v_{i_k}\}$ 是无此种性质的极小的 $V(D)$ 的子集,并设 $\tilde{V}_1=\tilde{V}-\{v_{i_k}\}$,由 $\tilde{V}$ 的极小性质可知,$\tilde{V}_1$ 有所要求的性质,于是 $\exists\, v_{i_r}\in\tilde{V}_1$,$\forall\, v_{i_j}\in\tilde{V}_1$,均有 $v_{i_r}\to v_{i_j}$. 这样一来,在 $\tilde{V}$ 中,只能是 $v_{i_r}\not\to v_{i_k}$,还必有 $v_{i_k}\not\to v_{i_r}$,若不然,$v_{i_k}\to v_{i_r}$,而 v_{i_r} 可达除 v_{i_k} 外的 $\tilde{V}$ 中各顶点,这就导致 v_{i_k} 可达 $\tilde{V}$ 中各顶点,这与 $\tilde{V}$ 的性质相矛盾. 于是,v_{i_r} 与 v_{i_k} 互不可达,这与 D 是单向连通图矛盾.

下面证明定理. 定理的充分性也是显然的,下面证必要性.

由已证命题可知,$V(D)$ 中存在 v_1,v_1 可达其余各顶点,$V_1=V(D)-\{v_1\}$ 中存在 v_2 可达 V_1 中各顶点,$V_2=V-\{v_1,v_2\}$ 中存在 v_3 可达 V_2 中各顶点,$\cdots$,$V_{n-2}=V(D)-\{v_1,v_2,\cdots,v_{n-2}\}$ 中存在 v_{n-1} 可达 V_{n-2} 中各顶点,于是,$v_1\to v_2\to\cdots\to v_{n-1}\to v_n$,因而存在通路 $v_1\cdots v_2\cdots v_3\cdots v_{n-1}\cdots v_n$,它经过 D 中每个顶点至少一次. ▌

定义 7.33 设 D 为有向图,称具有强连通性质的极大子图为 D 的**强连通分支**. 称具有**单向**连通性质的极大子图为 D 的**单向连通分支**. 称具有弱连通性质的极大子图为 D 的**连通分支**.

由于在有向图 D 中,顶点之间的相互可达关系 $\leftrightarrow$ 是 $V(D)$ 上的等价关系,所以每个等价类的导出子图都对应一个强连通分支.

【例 7.8】 求图 7.23 中(a)、(b)所示的两个有向图中的强连通分支、单向连通分支.

解 (a) 中图共有 6 个强连通分支,它们分别由 $V_1=\{a\}$,$V_2=\{b\}$,$V_3=\{c,d,e,i,h\}$,$V_4=\{f\}$,$V_5=\{g\}$,$V_6=\{j,k,l\}$ 导出. 有 3 个单向连通分支,它们分别由 $V_1'=\{a,b\}$,$V_2'=\{c,d,e,i,h,f,g\}$,$V_3'=\{j,k,l\}$ 导出.

(b) 中图共有 5 个强连通分支,它们分别由 $V_1=\{e,f,g,h\}$,

$V_2=\{d\}, V_3=\{c\}, V_4=\{a\}, V_5=\{b\}$导出. 有 3 个单向连通分支, 它们分别由 $V_1'=\{a,b,c\}, V_2'=\{c,d\}, V_3'=\{d,e,f,g,h\}$导出.

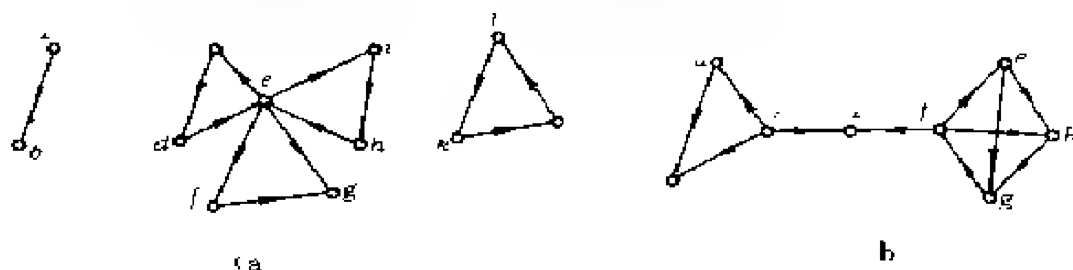


图 7.23

习 题 七

1. 设无向图 G 有 16 条边, 有 3 个 4 度顶点、4 个 3 度顶点, 其余顶点的度数均小于 3, 问 G 中至少有几个顶点?

2. 设 9 阶无向图 G 中, 每个顶点的度数不是 5 就是 6. 证明 G 中至少有 5 个 6 度顶点或至少有 6 个 5 度顶点.

3. 证明空间中不可能存在有奇数个面且每个面均有奇数条棱的多面体.

4. 在一次象棋比赛中, 任意两个选手之间至多只下一盘, 又每个人至少下一盘, 证明总能找到两名选手, 他们下过的盘数是相同的.

5. 设 n 阶无向简单图 G 为 3 次图(3-正则图), 边数 m 与 n 满足如下关系:

$$2n-3=m$$

试问 G 有几种非同构的情况? 并证明你的结论.

6. 下面给出的两个整数列, 哪个是可图化的? 对于可图化的请至少给出二个非同构的图.

(1) $d=(1,2,2,4,4,5)$;

(2) $d=(1,1,2,2,3,3,5)$;

7. 判断下列三个整数列中哪些是可以简单图化的? 对于是简单图化的试给出两个非同构的图.

(1) $(6,6,5,5,3,3,2)$;

(2) (5,3,3,2,2,1);

(3) (3,3,2,2,2,2);

8 画出无向完全图 K_4 的所有非同构的子图，其中哪些是 K_4 的生成子图，哪些是自补图？

9. 画出 3 阶有向完全图的所有非同构的子图，指出哪些是生成子图，哪些是自补图.

10. 现有 5 个 4 阶无向简单图，它们均有 3 条边，证明这 5 个图中至少有两个是同构的.

11 设 G 是 n 阶自补图，证明 $n=4k$ 或 $n=4k+1$，其中 k 为正整数

12. 设 G 是 6 阶简单无向图，证明 G 或 $\overline{G}$ 中存在 3 个顶点彼此相邻.

13. 若无向图 G 中恰有两个奇度顶点，证明这两个奇度顶点必然连通.

14. 设 $n(n\geqslant 3)$ 阶无向简单图 G 是连通的，但不是完全图，证明存在 $u,v,w\in V(G)$，使得 $(u,v),(v,w)\in E(G)$，而 $(u,w)\notin E(G)$.

15. 设 G 是无向简单图，$\delta(G)\geqslant 2$，证明 G 中存在长度大于等于 $\delta(G)+1$ 的圈.

16. 设 G 是无向简单图，$\delta(G)\geqslant 3$，证明 G 中各圈长度的最大公约数为 1 或 2.

17. 设 G 为 n 阶无向简单图，$\delta(G)\geqslant n-2$，证明 $\kappa(G)=\delta(G)$.

18. 设 G 是 n 阶无向简单图，证明：

(1) 当 $\delta(G)\geqslant\frac{n}{2}$ 时，G 为连通图；

(2) 当 $\delta(G)\geqslant\frac{1}{2}(n+k-1)$ 时，G 为 k 连通图；

19 设 G 是围长为 4 的 k 正则图.

(1) 证明 G 中至少有 $2k$ 个顶点；

(2) 当 G 中正好有 $2k$ 个顶点时，证明在同构的意义下 G 是唯一的.

20. 设 G 是 n 阶无向简单图，其直径 $d(G)=2$，$\Delta(G)=n-2$，证明 G 的边数 $m\geqslant 2n-4$.

21. 设 n 阶无向图 G 中有 m 条边，已知 $m\geqslant n$，证明 G 中必含圈.

22. 设无向简单图 G 中不含偶圈，证明 G 的块或为 K_2 或为奇圈.

23. 设 r,s 为两个正整数，满足 $1\leqslant r\leqslant s$ 且 $2r\geqslant s$，证明存在无向简单图 G，满足 $\kappa(G)=1$，$\lambda(G)=r$，$\delta(G)=s$.

24. 将无向完全图 K_n 的边涂上红色或蓝色.

(1) 证明对于 $n \geq 6$，任何一种随意的涂法，总存在红色的 K_3 或蓝色的 K_3.

(2) 用(1)中结论证明任何 6 个人中，或者有 3 个人彼此认识，或有 3 个人彼此不认识.

(3) 证明对于 $n \geq 7$，如果有 6 条或更多条红色的边关联于 1 个顶点，则在 K_n 中存在红色的 K_4 或存在蓝色的 K_3.

25. 设 D 为竞赛图，$\forall u, v, w \in V(D)$，若 $\langle u, v \rangle, \langle v, w \rangle \in E(D)$，就有 $\langle u, w \rangle \in E(D)$，则称 D 为传递的竞赛图. 证明 $n(n \geq 2)$ 阶传递的竞赛图不可能是强连通的.

26. 设 G 是 n 阶 m 条边的无向连通图，证明 $m \geq n-1$.

第八章　欧拉图与哈密尔顿图

在本章中介绍两种特殊的连通图，一种是具有经过所有边的简单生成回路的图，另一种是具有生成圈的图.

§8.1　欧　拉　图

18 世纪中叶，在当时的哥尼斯堡城有一条贯穿全市的普雷格

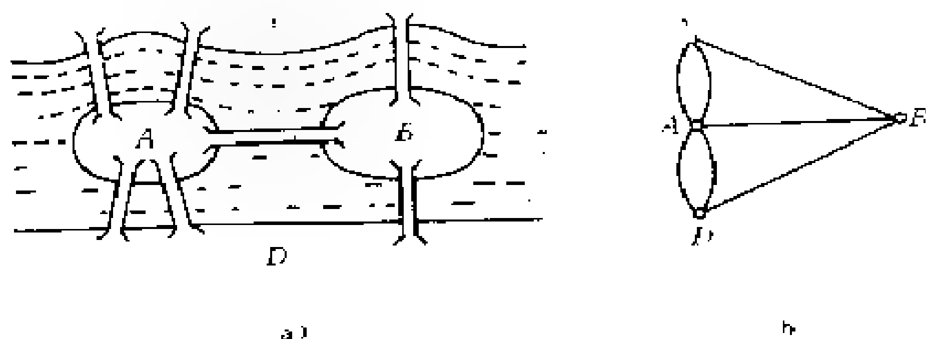


图　8.1

尔河，河中有两个岛与七座桥相联结，见图 8.1(a)所示. 当时那里的人们热衷于一个难题：一个散步者怎样不重复地走遍七桥，最后又回到出发点？试验者很多，都没有解决这个难题. 1736 年，瑞士数学家列昂哈德·欧拉(leonhard Euler)发表了图论的首篇论文“哥尼斯堡七桥问题”，在此文中欧拉论述了不重复地走遍七桥，最后回到出发点是不可能的.

为了解决这个难题，欧拉用 4 个字母 A，B，C，D 代表 4 块陆地，作为 4 个顶点，将联结两块陆地的桥用联结相应两个顶点的线段来表示，所得图如图 8.1(b)所示，于是哥尼斯堡七桥问题就变成了在图 8.1(b)图中是否存在经过每条边一次且仅一次行遍所

有顶点的回路问题了，欧拉在论文中论证了这样的回路是不存在的. 后来，人们称有这样回路的图为欧拉图.

定义 8.1 （1）通过图中所有边一次且仅一次行遍所有顶点的通路称为**欧拉通路**；

（2）通过图中所有边一次且仅一次行遍所有顶点的回路称为**欧拉回路**；

（3）具有欧拉回路的图称为**欧拉图**；

（4）具有欧拉通路但无欧拉回路的图称为**半欧拉图**.

以上定义既适合无向图又适合有向图. 其实，欧拉通路是经过所有边的简单通路并且是生成通路（经过所有顶点的通路），同样地，欧拉回路是经过所有边的简单生成回路.

另外，规定平凡图为欧拉图.

判断一个图（无向图或有向图）是否为欧拉图已有简单的判别法.

定理 8.1 设 G 是无向连通图，则下面三个命题是等价的：

（1）G 是欧拉图；

（2）G 中所有顶点的度数都是偶数.

（3）G 是若干个边不重的圈的并.

证明 设 G 是 n 阶、m 条边的无向图.

（1）⇒（2）. 若 G 是平凡图，结论显然成立，所以只考虑 G 是非平凡图的情况. 因为 G 为欧拉图，所以存在欧拉回路，因而必有 $m\geqslant n$. 设 C 为 G 中一条欧拉回路，则 $C=v_{i_0}e_{j_1}v_{i_1}e_{j_2}\cdots e_{j_{m-1}}v_{i_{m-1}}e_{j_m}v_{i_m}(v_{i_m}=v_{i_0})$，$e_{j_r}\neq e_{j_s}(r\neq s)$. $\forall v\in V(G)$，v 在 C 中每出现一次就获 2 度，若出现 $k(k\geqslant 1)$ 次就获得 $2k$ 度，所以 $d(v)=2k$，即 v 的度数为偶数.

（2）⇒（3）. 对 G 的边数 m 作归纳法.

$m=1$ 时，G 必为一个环，因而结论成立.

设 $m\leqslant k(k\geqslant 1)$ 时结论成立，下面证明 $m=k+1$ 时结论也成立.

由于 G 的连通性及无奇度顶点不难证明 G 中存在圈，设 C 为 G 中一个圈，令 $G'=G-E(C)$，则 G' 有 $s(s\geqslant 1)$ 个连通分支 $G_1,G_2,\cdots,G_s$（可能有的连通分支为平凡图），则 G_r 的边数 $m_r<k$，且顶点的度仍均为偶数，由归纳假设可知：

$$G_r=\bigcup_{i=1}^{d_r}C_{ri},\quad r=1,2,\cdots,s,$$

显然 $E(C_{ri})\cap E(C_{rt})=\varnothing$，$i,t=1,2,\cdots,d_r$，$i\neq t$，$r=1,2,\cdots,s$，并且 $E(C_{ri})\cap E(C_{tj})=\varnothing$，$r,t=1,2,\cdots,s$，$r\neq t$，而 $i=1,2,\cdots,d_r$，$j=1,2,\cdots,d_t$. 于是

$$G=C\cup G'=C\cup\left(\bigcup_{r=1}^{s}\bigcup_{i=1}^{d_r}C_{ri}\right),$$

将所有的圈重新排序，令 $d=1+d_1+d_2+\cdots+d_s$，则

$$G=\bigcup_{i=1}^{d}C_i,\ E(C_i)\cap E(C_j)=\varnothing,\ i\neq j.$$

(3)⇒(1). 对 G 中的圈的个数 d 作归纳法.

$d=1$ 时，$G=C_1$，显然 C_1 为 G 中的欧拉回路，所以 G 是欧拉图.

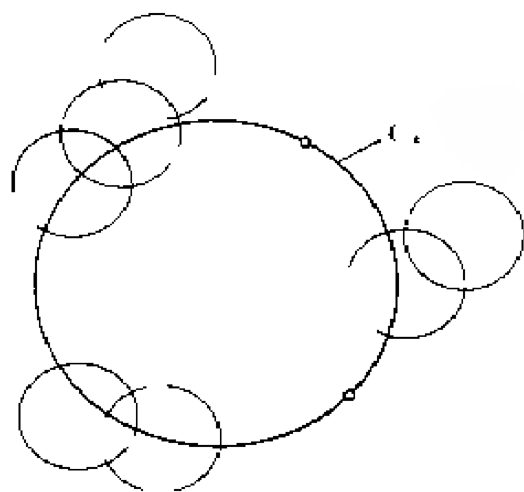


图 8.2

设 $d\leqslant k(k\geqslant 1)$ 时结论成立，下面证明 $d=k+1$ 时结论也成立.

设 $G_1'=\bigcup_{i=1}^{k+1}C_i-E(C_{k+1})$，并且设 G_1' 有 s 个连通分支 $G_1,G_2,\cdots,G_s$，由 G 的构造可知，G_i 为若干个边不重的圈的并或为平凡图，如示意图图 8.2 所示，于是 G_i 可以写成 $G_i=\bigcup_{j=1}^{k_i}C_{ij}$，$k_i\leqslant k$，$i=1,2,\cdots,s$. 由归纳假设可知 G_i 为欧拉图，因而存在欧拉回路，设 $\tilde{C}_i$ 为 G_i 中的欧拉回路，$i=1,2,\cdots,s$. 由 G 的连通性可知，C_{k+1} 与 $\tilde{C}_i$ 均有公共顶点，设 $v_{k+1,i}$ 为 C_{k+1} 与 $\tilde{C}_i$ 的一个公共顶点，规定一种走

法：从C_{i+1}的某一顶点出发开始行遍，当遇到$v_{(i+1),i}$时，先行遍C_i，再继续行遍，最后回到原出发点，得回路C，它经过G中每条边一次并且行遍G的所有顶点，因而C为G中欧拉回路，所以G为欧拉图. ▌

定理8.1给出了任何无向图G是否为欧拉图的判别法：G是欧拉图当且仅当G是连通的且G中无奇度顶点.

根据这个判别法，立即可知哥尼斯堡七桥问题所对应的图（图8.1(b)）不是欧拉图.

定理8.2 设G是连通的无向图，G是半欧拉图当且仅当G中恰有两个奇度顶点.

证明 必要性. 设G是n阶m条边的半欧拉图，由于G是半欧拉图，因而G中存在欧拉通路（但不是回路）. 设$P=v_{i_0}e_{j_1}v_{i_1}\cdots v_{i_{m-1}}e_{j_m}v_{i_m}$为$G$中一条欧拉通路$v_{i_0}\neq v_{i_m}$. $\forall v\in V(G)$，若v不在P的始点、终点出现，显然$d(v)$为偶数，若v在端点出现过（即作为v_{i_0}或v_{i_m}），则$d(v)$为奇数，因为P有一个始点、一个终点，所以G中只有两个奇度顶点.

充分性. 设G的两个奇度顶点分别为u_0和v_0，对G加新边(u_0,v_0)，即$G_1=G\cup(u_0,v_0)$，则G_1是连通的且无奇度数顶点，由定理8.1可知G_1是欧拉图，因而存在欧拉回路C，显然$C-(u_0,v_0)$是G中欧拉通路，所以G是半欧拉图. ▌

由定理8.2可知图8.1(b)也不是半欧拉图，因为它的4个顶点都是奇度数.

对于有向图D是否为欧拉图有下面定理.

定理8.3 设D是连通的有向图，则下面三个命题是等价的：

(1) D是欧拉图；

(2) $\forall v\in V(D)$，$d^+(v)=d^-(v)$；

(3) D为若干个边不重的有向初级回路的并.

本定理的证明类似于定理8.1.

定理 8.4 设 D 是连通的有向图，D 是半欧拉图当且仅当 D 恰有两个奇度顶点，其中的一个入度比出度大 1，另一个的出度比入度大 1，而其余顶点的入度均等于出度.

本定理的证明留给读者.

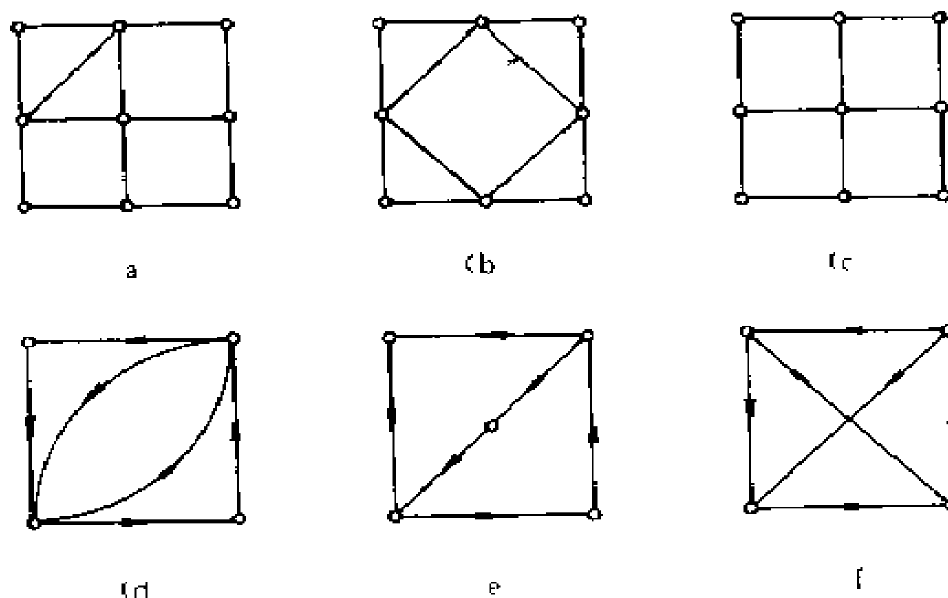


图 8.3

根据定理 8.1～8.4，在图 8.3 中容易判断，(b)，(d) 为欧拉图，(a)，(e) 为半欧拉图，而(c)，(f)既不是欧拉图，也不是半欧拉图.

设 G 为欧拉图(无向的或有向的)，一般说来 G 中存在若干条欧拉回路. 求 G 中的欧拉回路已有了算法. 下面以求无向欧拉图中的欧拉回路为例，介绍 Fleury 算法.

Fleury 算法：

(1) 任取 $v_0 \in V(G)$，令 $P_0 = v_0$；

(2) 设 $P_i = v_0e_1v_1e_2\cdots e_iv_i$ 已经行遍，按下面方法从 $E(G)-\{e_1,e_2,\cdots,e_i\}$ 中选取 e_{i+1}：

① e_{i+1} 与 v_i 相关联；

② 除非无别的边可供行遍，否则 e_{i+1} 不应该为 $G_i = G-\{e_1,e_2,\cdots,e_i\}$ 中的桥；

(3) 当(2)不能再进行时，算法停止.

下面证明 Fleury 算法是正确的.

定理 8.5 设 G 是无向欧拉图，则 Fleury 算法终止时得到的简单通路是欧拉回路.

证明 设算法终止时得到的通路为 $P_m=v_0e_1v_1e_2\cdots e_mv_m$，$P_m$ 是简单通路是显然的，下面分别证明 P_m 是回路，并且经过 G 中全部边(当然也就行遍了 G 的全部顶点).

(1) 证明 P_m 是回路.

算法终止时，说明 G_m 中已无边与 v_m 关联，又因为 G 中无奇度顶点，因而必有 $v_m=v_0$，这说明 P_m 为回路且 $d_{G_m}(v_0)=d_{G_m}(v_m)=0$.

(2) 证明 P_m 经过 G 中所有边.

用反证法证明之，假设回路 P_m 不是欧拉回路，即 $\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}\neq E(G)$，下面来推矛盾. 设 $V_m=\{v|v\in V(P_m)\wedge d_{G_m}(v)>0\}$，$\bar{V}_m=(V(G)-V_m)\cap V(P_m)$. 显然，$v_0=v_m\in \bar{V}_m$. 又因为 P_m 不是欧拉回路，所以 $V_m\neq\emptyset$. 设 $v_r\in V_m$ 且是角标最大的顶点，即 v_{r+1}，$v_{r+2},\cdots,v_m$ 均属于 $\bar{V}_m$，即 $d_{G_m}(v_r)>0$，而 $d_{G_m}(v_{r+1})=d_{G_m}(v_{r+2})=\cdots=d_{G_m}(v_m)=0$.

由于 $v_r\neq v_0$，所以当过程进行完 r 步时，$d_{G_r}(v_r)$，$d_{G_r}(v_0)$ 均为奇数，因而 v_r 与 v_0 必处于 G_r 的同一个连通分支 H_r 中，且 H_r 中再无其它奇度顶点，所以 H_r 为半欧拉图，因而存在 v_r 到 v_0 的欧拉通路，在此通路上，$e_{r+1},e_{r+2},\cdots,e_m$ 均为 G_r 中的桥，但 G_m 中，e_{r+1} 已被删除，可是 $d_{G_m}(v_r)>0$，这上说明在 G_r 中，v_r 除关联 e_{r+1}(桥)外，还必关联其它的边，设 e 在 G_r 中与 e_{r+1} 相邻且 e 不在 P_m 中，由 G_r 的性质可知 e 必在某个 G_r 的圈中，因而 e 不是 G_r 中的桥，于是在行遍过程中的第 $r+1$ 步犯了能不走桥而走了桥的错误. 因而 P_m 中必含 G 中全部边，即 P_m 是 G 中的欧拉回路. ∎

在图 8.4 所示的欧拉图中，求从 v_1 出发的欧拉回路，如果 $P_4=v_1e_1v_2e_2v_3e_3v_4e_7v_7$，再往下走注意别走桥，就可以走出欧拉回路:

$P_{10}=v_1e_1v_2e_2v_3e_3v_4e_7v_7e_6v_6e_5v_5e_4v_4e_8v_2e_9v_7e_{10}v_1$.

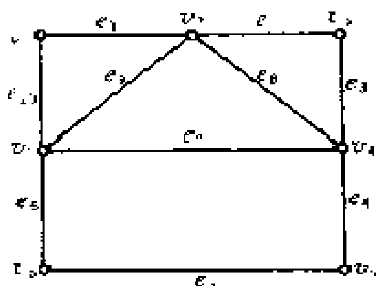


图 8.4

设 C 是无向欧拉图 G 中任意一条简单回路，则 $G-E(C)$ 中各顶点度数的奇偶性不变，因而若 $E(G)-E(C)\neq\varnothing$，则 $G-E(C)$ 各连通分支均为欧拉图，因而各连通分支均有欧拉回路，可将这些回路逐步插入 C 中，形成 G 中的欧拉回路，称这种算法为逐步插入回路法，设 G 是 n 阶无向欧拉图，求 G 中欧拉回路的逐步插入回路法算法如下：

开始 $i\leftarrow 0, v^*=v_1, v=v_1, P_0=v_1, G_0=G$.

1 在 G_i 中取任一条与 v 关联的边 $e=(v,v')$ 将 e 及 v' 加入 P_i 中得 P_{i+1}.

2 若 $v'=v^*$，转 **3**，否则 $i\leftarrow i+1, v=v'$，转 **1**.

3 若 $E(P_{i+1})=E(G)$，结束，否则，令 $G_{i+1}=G-E(P_{i+1})$，在 G_{i+1} 中任取一条与 P_{i+1} 中某顶点 v_k 关联的边 e，先将 P_{i+1} 改写成起点（终点）为 v_k 的简单回路，再置 $v^*=v_k, v=v_k, i\leftarrow i+1$，转 **1**.

逐步插入回路法的复杂度为 $O(m)$，其中 m 为 G 的边数.

在图 8.4 所示欧拉图中，用逐步插入回路法求欧拉回路. 若始于 v_1 的回路 $P_7=v_1e_1v_2e_2v_3e_3v_4e_4v_5e_5v_6e_6v_7e_{10}v_1$，则 $G-E(P_7)$ 中以 v_2, v_4, v_7 为顶点的 K_3 中的边均未走到，将 P_7 写成 $v_2e_2v_3e_3v_4e_4v_5e_5v_6e_6v_7e_{10}v_1e_1v_2$，在 $G-E(P_7)$ 中，从 v_2 再继续转 **1**，得 $P_{10}=v_2e_2v_3e_3v_4e_4v_5e_5v_6e_6v_7e_{10}v_1e_1v_2e_9v_7e_7v_4e_8v_2$ 为 G 中的一条欧拉回路.

在本节的最后，讨论有向欧拉图在计算机译码方面的应用.

设有 $m(m\geqslant 2)$ 个字母，比如 $a_1, a_2, \cdots, a_m$，问题是如何将 m^n 个字母（m^{n-1} 个 a_1，m^{n-1} 个 a_2，…，m^{n-1} 个 a_m）放在一个对应 m^n 个扇形的圆盘上，使圆盘上每连续的 n 位（按顺时针计）对应一个长为 n 的符号串，见图 8.5 所示的输出部分，而圆盘每按顺时针转动

一格，输出部分就对应一个新的符号串，转动一周，即转动 m^n 次，就得到由 m 个字母产生的长度为 n 的 m^n 个各不相同的符号串.

可用构造有向欧拉图的办法解决以上问题. 设 $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$，构造 $D=<V,E>$ 如下：

$$V=\{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}\mid\alpha_i\in S,1\leqslant i\leqslant n-1\},$$

$$E=\{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\mid\alpha_j\in S,1\leqslant j\leqslant n\}.$$

规定 D 中顶点与边的关联关系如下：

顶点 $a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_{n-1}}$ 引出 m 条边：$a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_{n-1}}a_r$，$r=1,2,\cdots,m$.

边 $a_{j_1}a_{j_2}\cdots a_{j_n}$ 引入顶点 $a_{j_2}a_{j_3}\cdots a_{j_n}$.

易知 D 是连通的，且每个顶点的入度等于出度，均等于 m，所以 D 是有向欧拉图.

在 D 中任意求一条欧拉回路 C，不妨设 $C=e_1e_2\cdots e_{m^n}$，取 C 中各边的最后一个字母，按各边在 C 中的顺序排成圆形放在圆盘上，就可以产生 m^n 个长为 n 的各不相同的符号串.

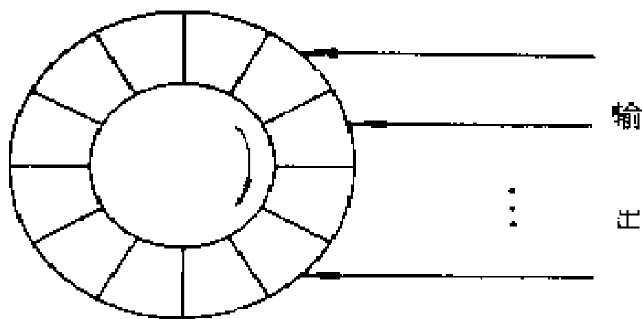
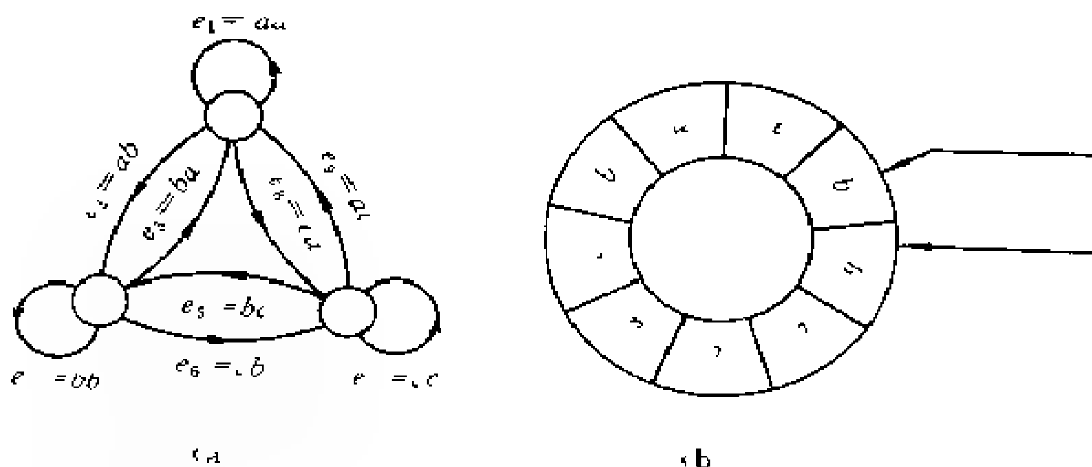


图 8.5

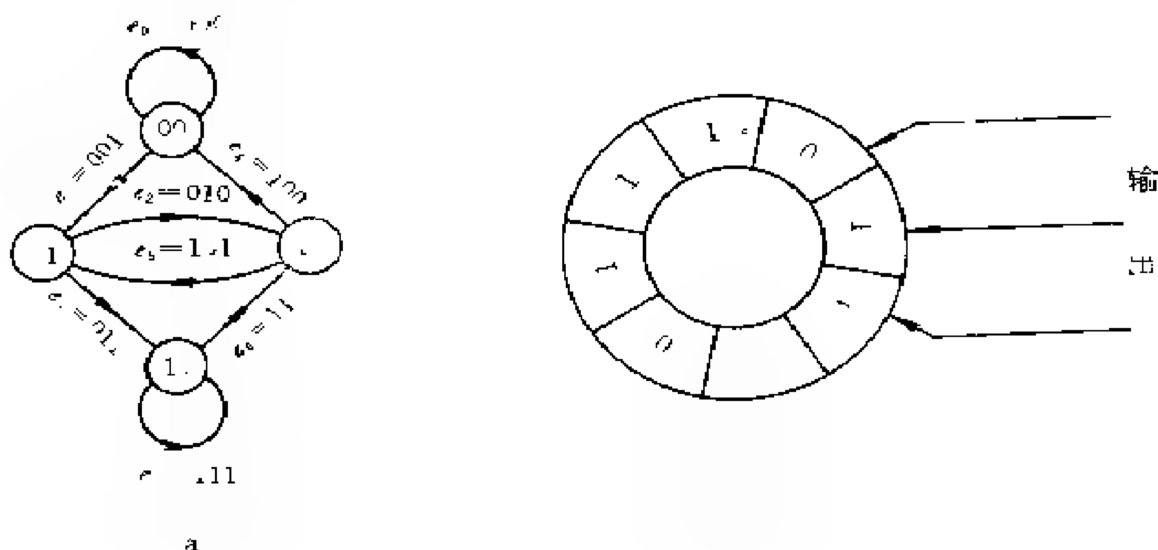
取 $S=\{a,b,c\}$，$n=2$，则 $D=<V,E>$ 中，$V=\{a,b,c\}$，$E=\{aa,ab,ac,ba,bb,bc,ca,cb,cc\}$，$D$ 如图 8.6 中(a)所示，$C=e_1e_2e_4e_5e_7e_8e_9e_6e_3$ 为 D 中一条欧拉回路，取出 C 中各边最后一位上的字母按顺序放在圆盘上，见图 8.6 中(b)所示. 圆盘每转动一格，输出一个长为 2 的符号串：$bb,ab,aa,ba,cb,ac,ca,cc,bc$.

再取 $S=\{0,1\}$，$n=3$，则 $D'=<V',E'>$ 中，$V'=\{00,01,10,11\}$，$E'=\{000,001,\cdots,111\}$. D' 如图 8.7 中(a)所示，$C'=e_0e_1e_2e_5e_3e_7e_6e_4$ 为 D' 中一条欧拉回路，取出 C' 中各边最后一位上的数字按顺序放在圆盘上，见图 8.7 中(b)所示，圆盘每转动一格输出一个长为 3 的 2 元码：010，001，000，100，110，111，011，101.



(a)　　　　　　(b)

图 8.6



(a)

图 8.7

§8.2 哈密尔顿图

1859 年威廉·哈密尔顿(William Hamilton)提出一个问题:能否在正十二面体图(见图 8.8 所示)上求一条初级回路,使它含图中所有顶点?他形象地将每个顶点看作一个城市,连接两顶点之间的边看作两城市之间的交通线. 于是哈密尔顿提出的问题就变成了如下的问题:能否从某个城市出发,沿交通线经过每个城市一

次，最后回到出发点？由于作了这样的解释，哈密尔顿将这个问题称为**“周游世界问题”**，并且作了肯定的回答. 按照图中所给城市的编号行遍，可得所要求的回路. 对于一般的连通图 G 也可以提出这样的问题，即能否找到一条含图中所有顶点的初级通路或回路.

定义 8.2

(1) 经过图中所有顶点一次且仅一次的通路称为**哈密尔顿通路**；

(2) 经过图中所有顶点一次且仅一次的回路称为**哈密尔顿回路**；

(3) 具有哈密尔顿回路的图称为**哈密尔顿图**；

(4) 具有哈密尔顿通路而不具哈密尔顿回路的图称为**半哈密尔顿图**.

平凡图是哈密尔顿图.

到目前为止，还没有找到一个简明的条件作为一个图是否为哈密尔顿图的充要条件. 从这个意义上，研究哈密尔顿图比研究欧拉图难得多. 下面给出一些哈密尔顿通路、回路存在的必要条件或充分条件.

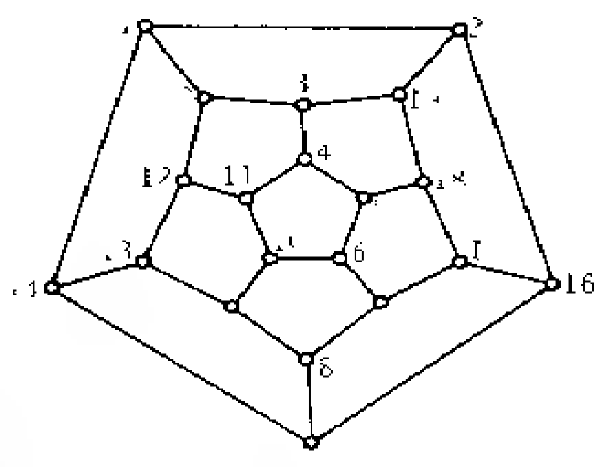


图 8.8

定理 8.6 设无向图 $G=\langle V,E\rangle$ 是哈密尔顿图，则对于 V 的任意非空真子集 V_1 均有

$$p(G-V_1)\leq|V_1|.$$

其中，$p(G-V_1)$ 为 $G-V_1$ 的连通分支数.

证明 设 C 为 G 中任意一条哈密尔顿回路，当 V_1 中顶点在 C 中均不相邻时，$p(C-V_1)=|V_1|$ 最大，其余情况下均有 $p(C-V_1)<|V_1|$，所以有 $p(C-V_1)\leq|V_1|$. 而 C 是 G 的生成子图，所

以：$p(G-V_1)\leqslant p(C-V_1)\leqslant |V_1|$. ▌

推论 设无向图 $G=\langle V,E\rangle$ 是半哈密尔顿图，则对于 V 的任何非空真子集 V_1 均有

$$p(G-V_1)\leqslant |V_1|+1. \quad ▌$$

证明 设 P 为起于 u 终于 v 的 G 中的一条哈密尔顿通路，令 $G_1=G\cup(u,v)$（在 G 中 u,v 之间加一条新边），易知 G_1 是哈密尔顿图，由定理 8.6 可知，$p(G_1-V_1)\leqslant |V_1|$，而

$$\begin{aligned}&p(G-V_1)\\&=p(G_1-V_1-(u,v))\leqslant p(G_1-V_1)+1\leqslant |V_1|+1.\end{aligned} \quad ▌$$

定理 8.6 中的条件是图为哈密尔顿图的必要条件，但不是充分条件，有的图，比如彼得森图（图 7.6(d)所示），满足定理 8.6 中的条件，但它不是哈密尔顿图. 彼得森图中存在哈密尔顿通路，所以它是半哈密尔顿图.

当然，若某图 G 不满足定理 8.6 中的条件，则它一定不是哈密尔顿图. 图 8.9 所示的图是半哈密尔顿图，但不是哈密尔顿图，取 $V_1=\{1,2,3,4,5\}$，则 $p(G-V_1)=6>|V_1|=5$，由定理 8.6 可知它不是哈密尔顿图. 其实，图 8.9 所示图为二部图. 由定理 8.6 立刻可知，若 $G=\langle V_1,V_2,E\rangle$ 为二部图且为哈密尔顿图，则必有 $|V_1|=|V_2|$，而图 8.9 所示二部图是不满足这个必要条件的.

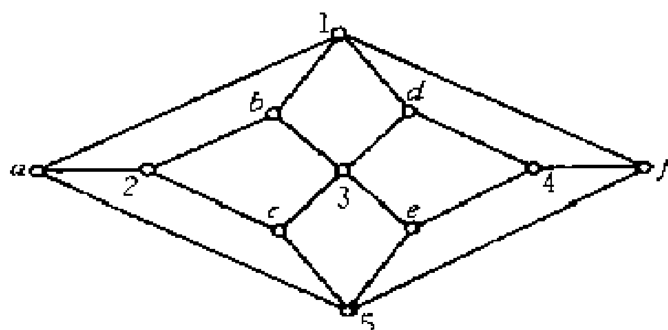


图 8.9

下面给出一些图 G 具有哈密尔顿回路或通路的一些充分条件.

定理 8.7 设 G 是 $n(n\geqslant 2)$ 阶无向简单图，若对于 G 中任意不相邻的顶点 v_i, v_j，均有

$$d(v_i)+d(v_j)\geqslant n-1, \qquad (*)$$

则 G 中存在哈密尔顿通路.

证明 首先证明 G 是连通的. 否则，G 至少有两个连通分支，设 G_1, G_2 是顶点数分别为 n_1 和 $n_2(n_1\geqslant 1, n_2\geqslant 1)$ 的连通分支，设 $v_1\in V(G_1)$，$v_2\in V(G_2)$，由于 G 是简单图，所以

$$d_G(v_1)+d_G(v_2)=d_{G_1}(v_1)+d_{G_2}(v_2)<n_1-1+n_2-1$$
$$\leqslant n_1+n_2-2\leqslant n-2,$$

这与定理中的条件(*)是矛盾的，所以 G 是连通的.

下面证明 G 中存在哈密尔顿通路.

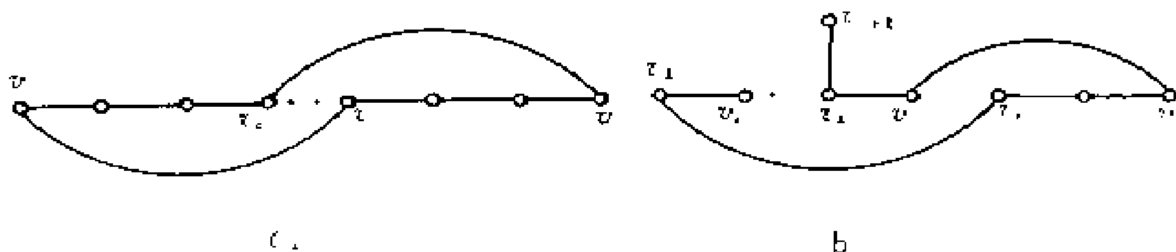
设 $\Gamma=v_1v_2\cdots v_l$ 为 G 中用“扩大路径法”得到的“极大路径”，即 Γ 的始点 v_1 与终点 v_l 不与 Γ 外的顶点相邻，显然 $l\leqslant n$.

(1) 若 $l=n$，则 Γ 为 G 中经过所有顶点的路径，即为哈密尔顿通路.

(2) 若 $l<n$，说明 G 中还有在 Γ 外的顶点，但此时可以证明存在经过 Γ 上所有顶点的圈，证明如下：

① 若在 Γ 上 v_1 与 v_l 相邻，则 $v_1v_2\cdots v_lv_1$ 为过 Γ 上所有顶点的圈.

② 若在 Γ 上 v_1 与 v_l 不相邻，用定理中的条件(*)来寻找圈，在 Γ 上，设 v_1 与 $v_{i_1}=v_2, v_{i_2},\cdots,v_{i_k}$ 相邻（k 必大于等于 2，否则，$d(v_1)+d(v_l)\leqslant 1+l-2=l-1<n-1$），此时 v_l 必与 $v_{i_2}, v_{i_3},\cdots,v_{i_k}$ 相邻的顶点 $v_{i_2-1}, v_{i_3-1},\cdots,v_{i_k-1}$ 至少之一相邻（否则，$d(v_1)+d(v_l)\leqslant k+l-2-(k-1)=l-1<n-1$）. 设 v_l 与 $v_{i_r-1}(2\leqslant r\leqslant k)$ 相邻，见图 8.10(a)所示. 删除边 (v_{i_r-1}, v_{i_r})，得回路 $C=v_1v_{i_1}\cdots v_{i_r-1}v_lv_{l-1}\cdots v_{i_k}\cdots v_{i_r}v_1$.



(a)　　　　　　　　　　　　　　(b)

图 8.10

(3) 证明存在比 Γ 更长的路径.

因为 $l<n$，所以 $V(G)-V(C)\neq\varnothing$，即 C 外还有 G 中顶点. 由于 G 的连通性，所以存在 C 外的顶点与 C 上顶点相邻，不妨设 $v_{l+1}\in V(G)-V(C)$ 且 v_{l+1} 与 C 上顶点 v_k 相邻，见图 8.10(b)所示，删除边 (v_{k-1},v_k) 得路径 $v_{k-1}\cdots v_1 v_{i_r}\cdots v_l v_{i_{r-1}}\cdots v_k v_{l+1}$，记为 Γ'. 显然 Γ' 比 Γ 长 1，且 Γ' 上有 $l+1$ 个顶点. 对此路径上的顶点重新排序，记为

$$\Gamma'=v_1v_2\cdots v_lv_{l+1}.$$

对 Γ' 重复(1)～(3)，得 G 中哈密尔顿通路或比 Γ' 更长的路径，由于 G 为有限图，在有限步内一定得 G 中的哈密尔顿通路.

▍

推论 1 设 G 为 $n(n\geqslant 3)$ 阶无向简单图，若对于 G 中任意不相邻的顶点 v_i,v_j，均有

$$d(v_i)+d(v_j)\geqslant n \qquad (**)$$

则 G 中存在哈密尔顿回路，从而 G 为哈密尔顿图.

证明 由定理 8.7 知 G 是连通的且 G 中存在哈密尔顿通路，设 $\Gamma=v_{i_1}v_{i_2}\cdots v_{i_n}$ 为 G 中一条哈密尔顿通路.

若 v_{i_1} 与 v_{i_n} 相邻，则 $C=v_{i_1}v_{i_2}\cdots v_{i_n}v_{i_1}$ 为 G 中哈密尔顿回路. 否则，利用(**)同定理 8.7 的证明类似，存在过 $v_{i_1},v_{i_2},\cdots,v_{i_n}$ 的圈，此圈为 G 中的哈密尔顿回路. ▍

推论 2 设 G 为 $n(n\geqslant 3)$ 阶无向简单图，若对于任意的 $v\in V(G)$，均有 $d(v)\geqslant\frac{n}{2}$，则 G 为哈密尔顿图.

利用推论 1、推论 2 得证.

定理 8.8 设 u,v 为无向 n 阶简单图 G 中的两个不相邻的顶点，且 $d(u)+d(v)\geq n$，则 G 为哈密尔顿图当且仅当 $G\cup(u,v)$ 为哈密尔顿图.

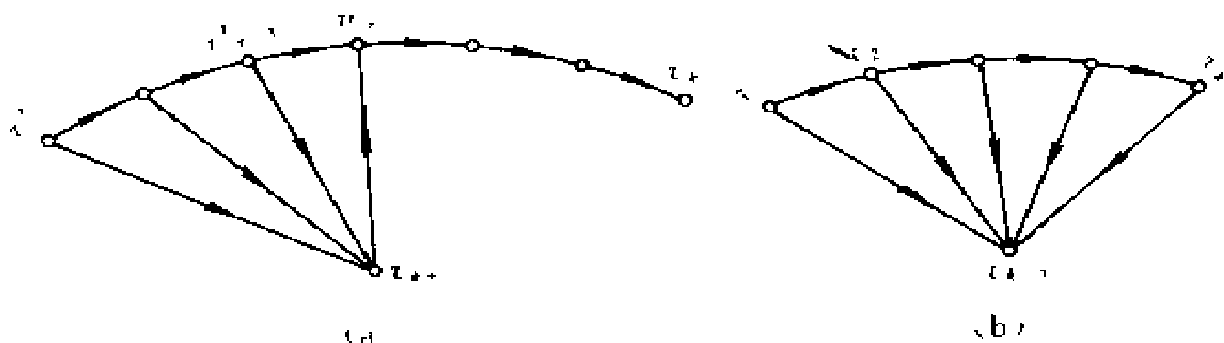
本定理的证明留给读者.

定理 8.9 设 D 为 $n(n\geq 2)$ 阶竞赛图，则 D 具有哈密尔顿通路.

证明 对 n 做归纳法.

$n=2$ 时，D 的基图为 K_2，显然 D 中存在哈密尔顿通路.

设 $n=k$ 时结论成立，下面证明 $n=k+1$ 时结论也成立. 设 D 为 $k+1$ 阶竞赛图，设 $V(D)=\{v_1,v_2,\cdots,v_k,v_{k+1}\}$，令 $D_1=D-v_{k+1}$，则 D_1 为 k 阶竞赛图，由归纳假设可知 D_1 中存在哈密尔顿通路，设 $P_1=v_1'v_2'\cdots v_k'$ 为 D_1 中一条哈密尔顿通路. 下面证明在 D 中 v_{k+1} 可扩展到 P_1 中去. 若存在 $v_r'(1<r<k)$，有 $<v_i',v_{k+1}>\in E(D)$，$i=1,2,\cdots,r-1$，而 $<v_{k+1},v_r'>\in E(D)$，见图 8.11(a)所示，则 $v_1'v_2'\cdots v_{r-1}'v_{k+1}v_r'\cdots v_k'$ 为 D 中的哈密尔顿通路. 否则必有 $<v_i',v_{k+1}>\in E(D)$，$i=1,2,\cdots,k$，见图 8.11(b)所示，则 $v_1'v_2'\cdots v_k'v_{k+1}$ 为 D 中哈密尔顿通路. ▌



(a) (b)

图 8.11

推论 设 D 为 n 阶有向图，若 D 含 n 阶竞赛图作为子图，则 D 中具有哈密尔顿通路.

定理 8.10 强连通的竞赛图为哈密尔顿图.

证明 若 D 是平凡图,结论显然成立. 若 D 是2阶竞赛图,D 不可能是强连通的,因而下面仅对 $n\geqslant 3$ 的 n 阶强连通竞赛图进行讨论.

(1) 证 D 中存在长度为3的圈.

设 v_0 为 D 中任一顶点,令

$\Gamma_D^+(v_0)=\{v \mid \langle v_0,v\rangle\in E(D)\}$,$\Gamma_D^-(v_0)=\{v \mid \langle v,v_0\rangle\in E(D)\}$,

由 D 的强连通性可知,$\Gamma_D^+(v_0)\neq\varnothing$ 且 $\Gamma_D^-(v_0)\neq\varnothing$,而且 $\Gamma_D^+(v_0)\cup\Gamma_D^-(v_0)=V(D)-\{v_0\}$. 还是由于 D 的强连通性可知,必存在 $u'\in\Gamma_D^+(v_0)$,$v'\in\Gamma_D^-(v_0)$,使得 $\langle u',v'\rangle\in E(D)$. 于是 $v_0u'v'v_0$ 为 D 中长度为3的圈,见图8.12(a)所示.

(2) 若 D 中存在长度为 $k(3\leqslant k\leqslant n)$ 的圈,则必存在长度为 $k+1$ 的圈.

设 C 为 D 中一个长度为 $k(3\leqslant k\leqslant n)$ 的圈,又分下面两种情况讨论.

① 若存在 C 外顶点 v,既有 C 上的顶点邻接到 v,又有 C 上的顶点邻接于 v,则在 C 上一定存在顶点 v_i,使得 $\langle v_{i-1},v\rangle\in E(D)$ 且 $\langle v,v_i\rangle\in E(D)$,见图8.12(b)所示,则 $C'=v_1v_2\cdots v_{i-1}vv_iv_{i+1}\cdots v_kv_1$ 为 D 中长度为 $k+1$ 的圈.

② 否则,C 外的任何顶点 v,或者邻接到 C 上的所有顶点,或者邻接于 C 上的所有顶点,于是可令

$V_1=\{v \mid v\notin E(C)\wedge v$ 邻接于 C 上的所有顶点$\}$,

$V_2=\{v \mid v\notin E(C)\wedge v$ 邻接到 C 上的所有顶点$\}$,

易知 $V_1\neq\varnothing$,$V_2\neq\varnothing$ 且 $V_1\cap V_2=\varnothing$. 由 D 是强连通图,因而存在 $v'\in V_1$,$v''\in V_2$,使得 $\langle v',v''\rangle\in E(D)$,在 C 上任取3个相邻的顶点,不妨设为 v_1,v_2,v_3,则 $\langle v_1,v'\rangle,\langle v',v''\rangle,\langle v'',v_3\rangle\in E(D)$,在 C 上删除 $\langle v_1,v_2\rangle,\langle v_2,v_3\rangle$ 的两条边,并上 $\langle v_1,v'\rangle,\langle v',v''\rangle,\langle v'',v_3\rangle$ 3条边,见图8.12(c)所示,则 $C'=v_1v'v''v_3v_4\cdots v_kv_1$ 为长为 $k+1$ 的圈.

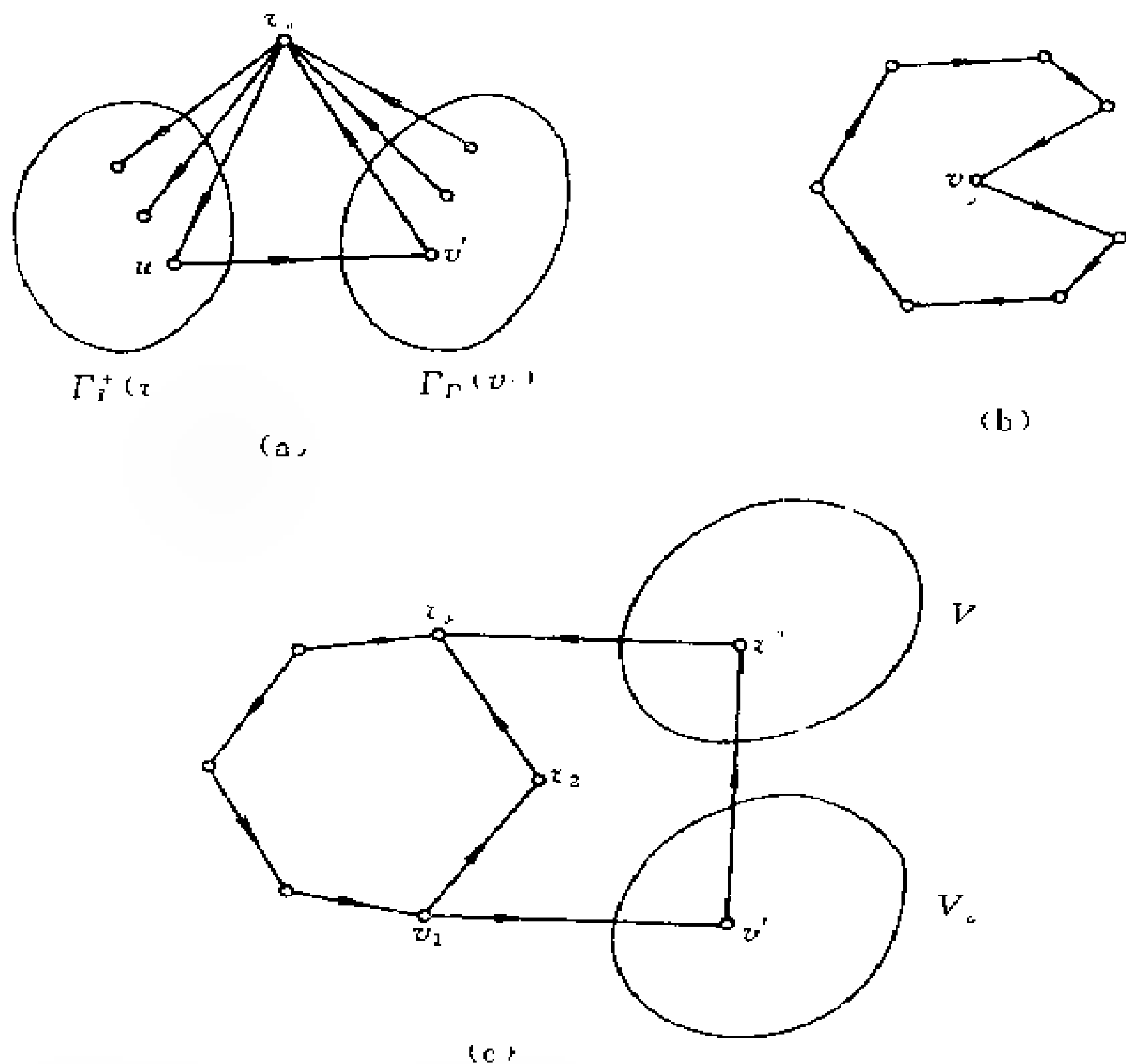


图 8.12

由(1)，(2)可知，D 中必存在长为 n 的圈，即为 D 中哈密尔顿回路，所以 D 是哈密尔顿图. ∎

推论 设 D 是 n 阶有向图，若 D 中含 n 阶强连通的竞赛图作为子图，则 D 是哈密尔顿图.

对于完全图 K_n 来说，除 K_2 不是哈密尔顿图之外，其余的都是哈密尔顿图. 设 C_1，C_2 均为图 G 的哈密尔顿回路，若 $E(C_1)\cap E(C_2)=\varnothing$，则称 C_1 与 C_2 是边不重的哈密尔顿图回路. $K_n(n\geqslant 3)$ 中含多少条边不重的哈密尔顿回路呢？下面定理及其推论回答这个问题.

定理 8.11 完全图 $K_{2k+1}(k\geqslant 1)$中含 k 条边不重的哈密尔顿回路，且 k 条边不重的哈密尔顿回路含 K_{2k+1}中的全部边.

证明 先将 K_{2k+1}的 $2k+1$ 顶点连续地标注上 $v_1,v_2,\cdots,v_{2k},v_{2k+1}$，即顶点的角标集为 $S_{2k+1}=\{1,2,\cdots,2k+1\}$. 然后，求出 K_{2k+1}中 k 条长为 $2k-1$ 的路径，第 i 条路径的第 j 个顶点的下标为 $i+(-1)^{j+1}\left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor$：

$$P_i=v_iv_{i-1}v_{i+1}v_{i-2}v_{i+2}\cdots v_{i-(k-1)}v_{i+(k-1)}v_{i-k},$$

$i=1,2,\cdots,k$. 再将 P_i 各顶点的下角标按 mod$(2k)$转换成 S_{2k+1}中的元素，0 转换成 $2k$，令

$$C_i=v_{2k+1}v_iv_{i-1}v_{i+1}\cdots v_{i-(k-1)}v_{i+(k-1)}v_{i-k}v_{2k+1},$$

$i=1,2,\cdots,k$.

可以证明$C_i(i=1,2,\cdots,k)$均为 K_{2k+1}中的哈密尔顿回路，且

$E(C_i)\cap E(C_r)=\varnothing, i\neq r$，且 $\sum\limits_{i=1}^{k}E(C_i)=E(K_{2k+1})$. ▌

图 8.13 中给出了 K_7 的 3 条边不重的哈密尔顿回路.

推论 $K_{2k}(k\geqslant 2)$中含 $k-1$ 条边不重的哈密尔顿回路，从 K_{2k}中删除这 $k-1$ 条哈密尔顿回路上的所有边后所得图含 k 条彼此不相邻的边.

证明 $k=2$ 时，K_4 中存在一条哈密尔顿回路和两条彼此不相邻的边是显然的. 下面就 $k\geqslant 3$ 时进行证明，由定义 7.16 联图的定义可知

$$K_{2k}=K_{2k'+1}+K_1, \quad 其中 k'=k-1.$$

设 $K_{2k'+1}$中顶点集为$\{v_1,v_2,\cdots,v_{2k'+1}\}=\{v_1,v_2,\cdots,v_{2k-1}\}$，$K_1$ 中顶点集为$\{v_{2k}\}$. 由定理 8.11 可知，$K_{2k'+1}$中存在 $k'=k-1$ 条边不重的哈密尔顿回路，设为 $C'_1,C'_2,\cdots,C'_{k'}$.

取 $e_i=(v_{i1}',v_{i2}')\in E(C_i')$，且$\{v_{i1}',v_{i2}'\}\cap\{v_{11}',v_{12}',\cdots,v'_{i-1,1},v'_{i-1,2},v'_{i+1,1},v'_{i+1,2},\cdots,v'_{k'1},v'_{k'2}\}=\varnothing$，$i=1,2,\cdots,k'$，令

$$C_i=(C_i'-(v_{i1}',v_{i2}'))\cup\{(v_{i1}',v_{2k}),(v_{2k},v_{i2}')\},$$

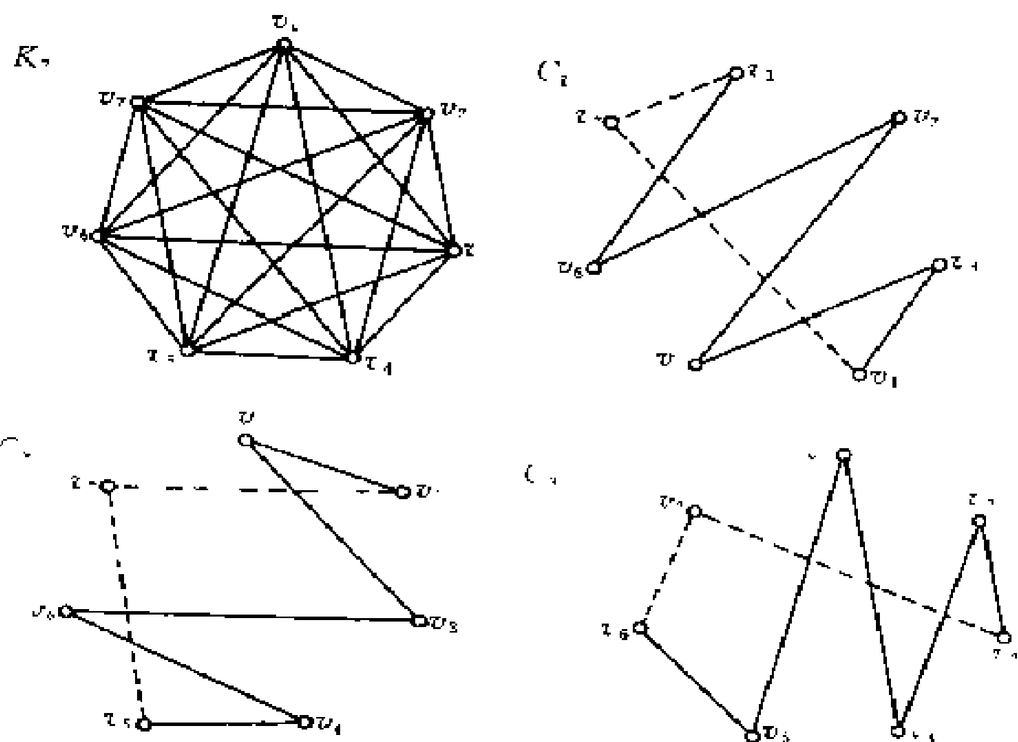


图 8.13

$i=1,2,\cdots,k'$，则 C_i 为 K_{2k} 中的哈密尔顿回路，且 $C_1,C_2,\cdots,C_{k'}$ 是彼此边不重的.

不妨设 $V=\{v_{11},v_{12},v_{21},v_{22},\cdots,v_{k'1},v_{k'2}\}\cup\{v_{2k-1},v_{2k}\}$，则边 $(v_{11},v_{12}),(v_{21},v_{22}),\cdots,(v_{k'1},v_{k'2}),(v_{2k-1},v_{2k})$ 均不在任何 C_i 中，且彼此均不相邻. ∎

图 8.14 所示的图为将 K_6 表示成 K_5+K_1 的形式.

$$C_1'=v_1v_4v_2v_3v_5v_1,\quad C_2'=v_2v_1v_3v_4v_5v_2$$

为 K_5 中的两条边不重的哈密尔顿回路，而

$$C_1=(C_1'-(v_1,v_4))\cup\{(v_1,v_6),(v_6,v_4)\}$$
$$=v_1v_6v_4v_2v_3v_5v_1,$$
$$C_2=(C_2'-(v_5,v_2))\cup\{(v_2,v_6),(v_6,v_5)\}$$
$$=v_2v_6v_5v_4v_3v_1v_2$$

为 K_6 中两条边不重的哈密尔顿回路. 边 $(v_1,v_4),(v_2,v_5),(v_3,v_6)$ 不在 C_1 和 C_2 中，且它们彼此不相邻.

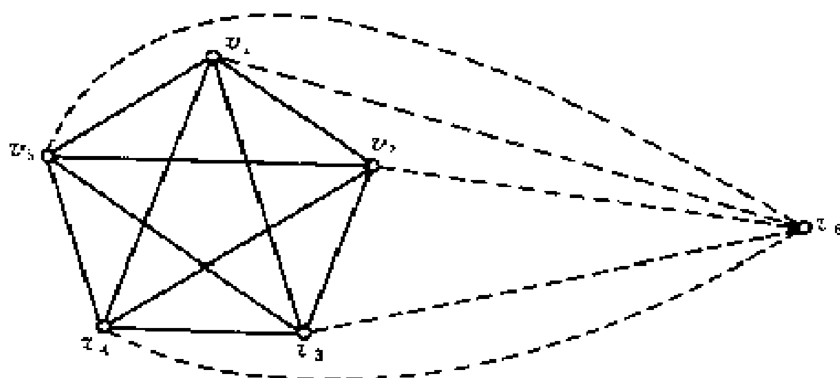


图 8.14

习 题 八

1. 设 G 为 $n(n\geqslant 2)$ 阶欧拉图，证明 G 是 2 边连通图.

2. 设 G 为无向连通图，证明：G 为欧拉图当且仅当 G 的每个块是欧拉图.

3. 设 G 是恰有 $2k(k\geqslant 1)$ 个奇度顶点的连通图，证明 G 中存在 k 条边不重的简单通路 $P_1, P_2, \cdots, P_k$，使得

$$E(G)=\bigcup_{i=1}^{k} E(P_i).$$

4. 设 G 为欧拉图，$v_0\in V(G)$，若从 v_0 开始行遍，无论行遍到那个顶点，只要未行遍过的边就可以行遍，最后行遍所有边回到 v_0，即得 G 中一条欧拉回路，则称 v_0 是可以任意行遍的. 证明：v_0 是可以任意行遍的当且仅当 $G-V_0$ 中无圈.

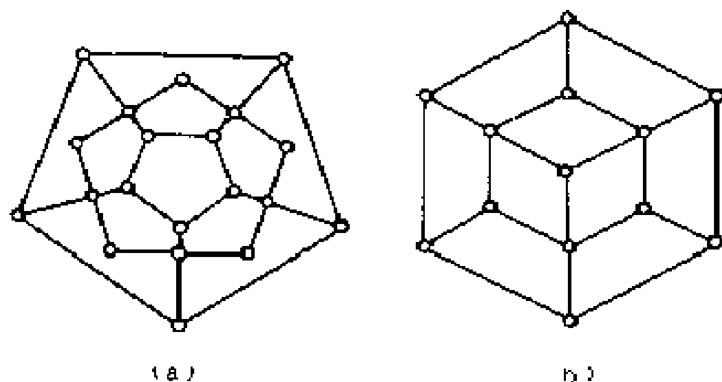
5. 如何将 16 个二进制数字（8 个 0，8 个 1）排成一个圆形，使得 16 个长为 4 的二进制数在其中各出现且仅出现一次？

6. 如何将 9 个 α、9 个 β，9 个 γ 排成圆形，使得由 α、β、γ 产生的 27 个长为 3 的符号串在其中均出现且仅出现一次？

7. 证明图 8.15 中所示的两个图均不是哈密尔顿图.

8. 证明彼得森图不是哈密尔顿图.

9. 设 G 为 n 阶无向简单图，边数 $m\geqslant\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2$. 证明 G 为哈密尔顿图. 再举例说明，当 $m=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1$ 时，G 不一定为哈密尔顿



(a)　　　　　　　　　(b)

图　8.15

图.

10. 设 G 为无向连通图，C 为 G 中一条初级回路(圈)，若删除 C 上任何一条边后，C 上剩下边的导出子图均为 G 中最长的路径，证明 C 为 G 中哈密尔顿回路，从而 G 为哈密尔顿图.

11. 已知 a,b,c,d,e,f,g 七个人中，a 会讲英语，b 会讲英语和汉语；c 会讲英语、意大利语和俄语；d 会讲汉语和日语；e 会讲意大利语和德语；f 会讲俄语、日语和法语；g 会讲德语和法语，能否将他们的座位安排在圆桌旁，使得每个人都能与他身边的人交谈？

12. 今有 $2k(k\geqslant 2)$ 个人去完成 k 项任务. 已知每个人均能与另外 $(2k-1)$ 个人中的 k 个人中的任何一个人组成小组(每组两个人)去完成他们共同熟悉的任务. 问这 $2k$ 个人能否分成 k 组(每组两个人)，每组完成一项他们共同熟悉的任务？

13. 今有 n 个人，已知他们中的任何二人合起来认识其余的 $n-2$ 人，试证明：当 $n\geqslant 3$ 时，这 n 个人能排成一列，使得中间任何人都认识两旁的人，而两头的人认识左边(或右边)的人. 而当 $n\geqslant 4$ 时，这 n 个人能排成一个圆圈，使得每个人都认识两旁的人.

14. 在四分之一国际象棋棋盘(4×4 黑白格棋盘)上跳马，使马经过每个格一次且仅一次，最后回到出发点能否办到？为什么？

15. 在国际象棋棋盘上跳马，要求同第 14 题，能办到吗？

16. 完成定理 8.8 的证明.

17. 在定理 8.11 的证明中，试证明 C_i 均为 K_{2k+1} 中的哈密尔顿回路，且 $E(C_i)\cap E(C_j)=\varnothing(i\neq j)$.

第九章　树

树是图论中重要的内容，在图论的历史上，树的概念曾由不同的科学家独立地建立过，最后由数学家约当(Jordan)给出了准确的定义.

在本章开始讨论之前，先做一个规定，即本章中所讲回路均指初级回路(圈)或简单回路，而不含复杂回路.

§9.1　无向树的定义及性质

定义 9.1　连通无回路(这里的回路指初级或简单的，本章内不再对此进行说明)的无向图称为**无向树**，常用 T 表示树. 若无向图 G 至少有两个连通分支且每个连通分支都是树，则称 G 为**森林**. 平凡图称为**平凡树**.

设 $T=\langle V,E\rangle$ 为一棵无向树，$\forall v\in V$，若 $d(v)=1$，则称 v 为 T 的**树叶**，若 $d(v)\geq 2$，则称 v 为 T 的**分支点**. 若 T 为平凡树，则 T 既无树叶，也无分支点.

无向树 T 有许多性质，这些性质中有些既是树的必要条件，又是充分条件，因而可看成树的等价定义.

定理 9.1　设 $G=\langle V,E\rangle$ 为 n 阶 m 条边的无向图，则下面各命题是等价的：

(1) G 是树(连通无回路)；

(2) G 中任二顶点之间存在唯一的一条路径；

(3) G 中没有圈，且 $m=n-1$；

(4) G 是连通的，且 $m=n-1$；

(5) G 是连通的，且 G 中任何边均为桥；

(6) G 中没有圈，但在 G 中任二不同顶点 u,v 之间增添边 (u,v)，所得图含唯一的一个圈.

证明 (1)⇒(2).

由 G 的连通性可知，$\forall u,v\in V$，u,v 之间存在通路，设 P_1 为 u,v 之间的一条通路，若 P_1 不是路径，则 G 中必有回路，这与 G 中无回路矛盾，所以 P_1 为路径，又若 P_1 不是 u,v 之间唯一的路径，设 P_2 是 u,v 之间不同于 P_1 的又一条路径，则必存在边 $e_1'=(v_x,v_1')$ 只在 P_1 上或只在 P_2 上，不妨设 e_1' 在 P_2 上，若还有与 e_1' 相邻的边 e_2' 在 P_2 上，而不在 P_1 上，得通路 $e_1'e_2'$（或 $e_2'e_1'$）在 P_2 上，不在 P_1 上，继续这一过程，最后得 $e_k'=(v_k',v_y')$ 只在 P_2 上，$e_1'e_2'\cdots e_k'$ 记为 $P(x,y)$ 为只在 P_2 上而不在 P_1 上的通路，且 v_x 与 v_y 是 P_1 与 P_2 的公共顶点，则 $P(x,y)$ 并上 P_1 上 v_x 与 v_y 之间的一段路径得图 G 中一条回路，这与 G 中无回路矛盾，于是 u,v 之间的路径是唯一的.

(2)⇒(3).

首先证明 G 中没有圈，若 G 中存在关联顶点 v 的环，则 v 到 v 存在两条路径，长度分别为 0 和 1，这与已知条件矛盾. 若 G 中存在长度大于等于 2 的圈，则圈上任何二不同顶点之间均存在两条不同路径，这与已知条件矛盾.

下面用归纳法证明 $m=n-1$.

$n=1$ 时，因为 G 中无圈，因而 $m=0$，此时 G 为平凡图，故结论为真.

设 $n<k(k\geq 1)$ 时结论成立，设 $n=k+1$，此时 G 至少有一条边，设 $e=(u,v)$ 为 G 中一条边，则 $G-e$ 必有两个连通分支 G_1,G_2（否则 $G-e$ 中 u 到 v 还有通路，因而 G 中含过 u,v 的回路，导致 G 中含圈）. 设 n_i,m_i 分别为 G_i 中的顶点数和边数，则 $n_i<k$，$i=1,2$. 由归纳假设知 $m_i=n_i-1$，于是，$m=m_1+m_2+1=n_1+n_2+1-2=n-1$.

(3)⇒(4).

只要证明 G 是连通的. 采用反证法. 否则设 G 有 $s(s\geqslant 2)$ 个连通分支 $G_1, G_2, \cdots, G_s$, G_i 中均无圈, 因而 G_i 均连通无回路, 即它们都是树. 由(1)⇒(2)⇒(3)可知, $m_i=n_i-1$(m_i, n_i 分别为 G_i 的边数和顶点数, $i=1,2,\cdots,s$), 于是

$$m=\sum_{i=1}^{s} m_i=\sum_{i=1}^{s} n_i-s=n-s.$$

由于 $s\geqslant 2$, 这与已知条件 $m=n-1$ 矛盾.

(4)⇒(5).

只要证明 G 中每条边均为桥, 任意的边 $e\in E(G)$, 均有 $|E(G-e)|=n-1-1=n-2$. 由习题七中 26 题可知, $G-e$ 不连通, 故 e 为桥.

(5)⇒(6).

由于 G 中每条边均为桥, 因而 G 中不可能含圈, 又因为 G 连通, 所以 G 为树, 由(1)⇒(2)可知, $\forall u,v\in V$, 且 $u\neq v$, 则 u,v 之间存在唯一的一条路径 $P(u,v)$, 则 $P(u,v)\cup(u,v)$ 为图 $G\cup(u,v)$ 中唯一的圈.

(6)⇒(1).

只要证明 G 是连通的. 由于 $\forall u,v\in V$, $u\neq v$, $(u,v)\cup G$ 产生唯一的圈 C, 则 $C-(u,v)$ 为 u 到 v 的通路, 因而 u,v 连通, 由 u,v 的任意性可知, G 是连通的. ▌

定理 9.2 设 T 是 n 阶非平凡的无向树, 则 T 至少有两片树叶.

证明 设 T 有 x 片树叶, 由 $m=n-1$ 及握手定理可知

$$2m=2n-2=\sum_{v_i\in V(T)} d(v_i)\geqslant x+2(n-x)$$

$\Rightarrow x\geqslant 2$. ▌

记 $n(n\geqslant 1)$ 阶非同构的无向树的棵数为 t_n, 对于给定的 n, 已能计算出 t_n 的值. 表 9.1 给出了一些 n 的 t_n 值, 但要想将 t_n 棵非同构的树均画出来, 不是一件易事, 对于较小的 n, 用无向树的性

质及握手定理可以将 t_n 棵非同构的树画出来.

例如，$n=8$ 时，边数 $m=7$，由握手定理可知

表 9.1

n	1	2	3	4	5	6	7	8
t_n	1	1	1	2	3	6	11	23
n	9	10	11	12	13	14	15	16
t_n	47	106	235	551	1301	3159	7741	19320
n	20			23		26		
t_n	823065			14828074		279793450		

8 阶无向树各顶点度数之和为 14，这 14 度分配给 8 个顶点，且每个顶点度数必大于等于 1，均小于等于 7，于是可给出度数分配方案如下：

(1) 1　1　1　1　1　1　1　7
(2) 1　1　1　1　1　1　2　6
(3) 1　1　1　1　1　1　3　5
(4) 1　1　1　1　1　1　4　4
(5) 1　1　1　1　1　2　2　5
(6) 1　1　1　1　1　2　3　4
(7) 1　1　1　1　1　3　3　3
(8) 1　1　1　1　2　2　3　3
(9) 1　1　1　1　2　2　2　4
(10) 1　1　1　2　2　2　2　3
(11) 1　1　2　2　2　2　2　2

不同方案生成的无向树当然是非同构的，要注意的是同一个方案可以生成非同构的树. 方案(1)、(2)，(3)，(4)，(7)，(11)各生成一棵非同构的树，(5)生成 2 棵非同构的无向树，(6)，(9)各生成 3 棵非同构的棵，(10)产生 4 棵非同构的无向树，(8) 生成 5 棵非同构的无向树，方案(10)生成的 4 棵非同构的树为图 9.1(a)所示，(8)生成的 5 棵非同构的树为图 9.1(b)所示. 8 阶非同构无向树共有

23 棵.

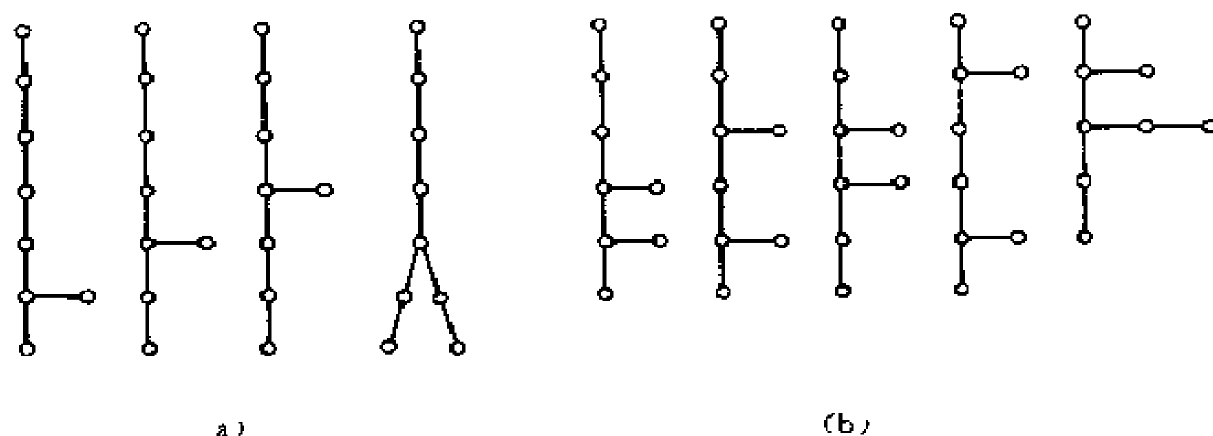


图 9.1

常将 1 个分支点带着 $n-1$ 片树叶的 n 阶无向树称为 n 阶**星形图**，其分支点称为**星心**. 常用 S_n 表示 n 阶星形图.

§9.2 生 成 树

定义 9.2 设 T 是无向图 G 的子图且为树，则称 T 为 G 的树，若 T 是 G 的生成子图并且为树，则称 T 为 G 的**生成树**. 对任意的边 $e\in E(G)$，若 $e\in E(T)$，则称 e 为 T 的**树枝**，否则称 e 为 T 的**弦**，并称 $G[E(G)-E(T)]$ 为 T 的**余树**，记作 $\overline{T}$.

在以上定义中，注意 $\overline{T}$ 不一定是树.

定理 9.3 无向图 G 具有生成树当且仅当 G 是连通的.

证明 必要性显然. 下面证明充分性.

若 G 中无圈，则 G 为树，当然 G 为自己的生成树，若 G 中含圈，任取一个圈 C，随便删除 C 上任何一条边，所得图仍然是连通的，继续这一过程，直到最后得到的图无圈为止，设最后的图为 T，则 T 是连通的无圈且是 G 的生成子图，所以 T 是 G 的生成树.

∎

由本定理不难得到下面两个推论.

推论 1　设 G 为 n 阶 m 条边的无向连通图，则 $m \geq n-1$.

推论 2　设 T 是 n 阶 m 条边的无向连通图 G 的一棵生成树，则 T 的余树 $\overline{T}$ 中含 $m-n+1$ 条边.

推论 3　设 T 是连通图 G 中一棵生成树，$\overline{T}$ 为 T 的余树，C 为 G 中任意一圈，则 $E(\overline{T}) \cap E(C) \neq \varnothing$.

定理 9.4　设 T 是无向连通图 G 中的一棵生成树，e 为 T 的任意一条弦，则 $T \cup e$ 中含 G 的只含一条弦其余边均为树枝的圈，而且不同的弦对应的圈是不同的.

证明　设 $e=(u,v)$，由定理 9.1 可知，u,v 之间存在唯一的路径 $P(u,v)$ 在 T 中，则 $P(u,v) \cup e$ 为 G 中只含弦 e 其余边均为树枝的圈. 显然当 e_1,e_2 为不同的弦时，e_2 不在 e_1 对应的圈 C_{e_1} 中，e_1 不在 e_2 对应的圈 C_{e_2} 中. ▌

【例 9.1】　设 G' 为无向连通图 G 的无圈子图，则 G 中存在生成树 T 含 G' 中所有边.

证明　若 G 为树结论显然成立. 若 G 不是树，则 G 中必含圈，设 C_1 为 G 中圈，则必存在边 $e_1 \in E(C_1) \wedge e_1 \notin E(G')$，令 $G_1 = G - \{e_1\}$. 若 G_1 还存在圈 C_2，必还存在边 $e_2 \in E(C_2) \wedge e_2 \notin E(G')$，再令 $G_2 = G_1 - \{e_2\} = G - \{e_1, e_2\}$，继续这一过程，直到 $G_k = G - \{e_1, e_2, \cdots, e_k\}$ 无圈为止，易知 G_k 是 G 的生成子图，无圈并且连通，又含 G' 中所有边，则 G_k 为所求的生成树 T.

定义 9.3　设 T 是 n 阶 m 条边的无向连通 G 的一棵生成树，设 $e_1', e_2', \cdots, e'_{m-n+1}$ 为 T 的弦，设 C_r 是 T 添加 e_r' 产生的 G 中只含弦 e_r' 其余边均为树枝的圈，称 C_r 为 G 对应 T 的弦 e_r' 的**基本回路**或**基本圈**，$r=1,2,\cdots,m-n+1$，并称 $\{C_1, C_2, \cdots, C_{m-n+1}\}$ 为 G 对应 T 的**基本回路系统**，称 $m-n+1$ 为 G 的**圈秩**，记作 $\xi(G)$.

由定义不难看出，n 阶 m 条边的无向连通图的不同的生成树对应的基本回路系统可能不同，但基本回路系统中的元素个数均为 G 的圈秩 $\xi(G)$.

定理 9.5　设 T 是连通图 G 的一棵生成树，e 为 T 的一条树

枝，则 G 中存在只含树枝 e，其余元素均为弦的割集. 设 e_1, e_2 是 T 的不同的树枝，则它们对应的只含一条树枝的割集是不同的.

证明 由定理 9.1 知道，e 为 T 的桥，因而 $T-e$ 有两个连通分支，设为 T_1 和 T_2. 令

$S_e=\{e \mid e\in E(G)$ 且 e 的两个端点分别属于 $V(T_1)$ 和 $V(T_2)\}$

显然 $e\in S_e$，且除 e 外 S_e 中元素全是弦，并且 S_e 是 G 的割集，由构造可知，若 e_1, e_2 是不同的树枝，它们对应的割集 S_{e_1} 与 S_{e_2} 不同.

∎

定义 9.4 设 T 是 n 阶连通图 G 的一棵生成树，$e_1', e_2', \cdots, e_{n-1}'$ 为 T 的树枝，S_i 是 G 的只含树枝 e_i' 的割集，则称 S_i 为 G 的对应生成树 T 由树枝 e_i' 产生的**基本割集**，$i=1,2,\cdots,n-1$，并称 $\{S_1, S_2, \cdots, S_{n-1}\}$ 为 G 对应 T 的**基本割集系统**，称 $n-1$ 为 G 的**割集秩**，记为 $\eta(G)$.

由定义不难看出，连通图 G 的不同的生成树对应的基本割集系统可能不同，但基本割集中的元素个数均为 $\eta(G)$.

【例 9.2】 无向图 G 如图 9.2 所示. 图中实线边所示的子图为 G 的一棵生成树 T，求 G 对应 T 的基本回路系统和基本割集系统.

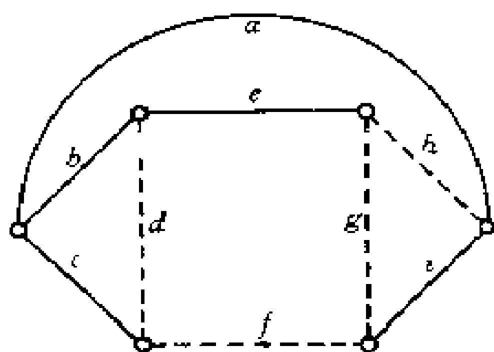


图 9.2

解 T 有 4 条弦，因而有 4 个基本回路：

$C_d=dcb, C_f=fcai, C_g=gebai, C_h=heba$，基本回路系统为

$$\{C_d, C_f, C_g, C_h\}.$$

T 有 5 条树枝，因而有 5 个基本割集：

$S_c=\{c,d,f\}$，$S_b=\{b,d,g,h\}$，$S_a=\{a,h,g,f\}$，

$S_e=\{e,g,h\}$，$S_i=\{i,g,f\}$.

基本割集系统为

$$\{S_c,S_b,S_a,S_e,S_i\}.$$

下面讨论标定的无向图中生成树的个数. 设 $G=<V,E>$ 为无向连通图，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，即 G 是顶点标定顺序的标定图，设 T_1，T_2 是 G 的两棵生成树，若 $E(T_1)\neq E(T_2)$，则认为 T_1 与 T_2 是 G 的不同的生成树. 在此种意义之下，记 G 的生成树的个数为 $\tau(G)$.

定理 9.6 设 $G=<V,E>$ 为 n 阶无向连通标定图 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，则对 G 的任意非环边 e 均有 $\tau(G)=\tau(G-e)+\tau(G\backslash e)$.

证明 $\forall e\in E(G)$，G 中任意一棵生成树 T，T 含 e 或不含 e 二者必居其一.

(1) G 中不含 e 的生成树与 $G-e$ 中的生成树是一一对应的，因而 $\tau(G-e)$ 为 G 中不含 e 的生成树的个数.

(2) G 中含 e 的生成树与 $G\backslash e$ 中生成树是一一对应的，所以 $\tau(G\backslash e)$ 为 G 中含 e 的生成树的个数，所以

$$\tau(G)=\tau(G-e)+\tau(G\backslash e).\quad ▌$$

用定理 9.6 计算标定图中生成树个数时，还应该注意，由于环不在任何生成树中，因而在计算过程中若出现环应自动地将环去掉.

【例 9.3】 计算图 9.3 标定图中生成树的个数，并画出所有不同的生成树.

解 图 9.4 给出了求 $\tau(G)$ 的计算过程，带杠边表示在下一步删除和收缩的边. 图 9.5 给出了 G 的 4 棵不同的生成树.

当 G 为 n 阶无向完全标定图时，有下面定理.

定理 9.7 $\tau(K_n)=n^{n-2}$ $(n\geqslant 2)$，其中 K_n 为 n 阶标定完全图.

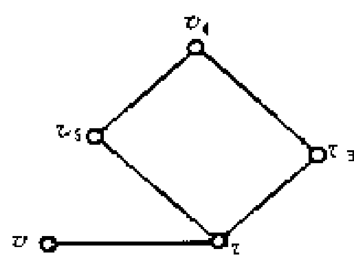


图 9.3

图 9.4

证明 为方便起见，令 $V(K_n)=\{1,2,\cdots,n\}$，由 $V(K_n)$ 中元素构造长为 $n-2$ 的序列，显然可以构造出 n^{n-2} 个各不相同的序列。下面证明 K_n 中生成树与以上构造的序列是一一对应的.

(1) 设 T 为 K_n 中任意一棵生成树，用如下方法构造长为 $n-2$ 的序列.

设 $k_1=\min\{r\mid r$ 是 T 的悬挂顶点(树叶)$\}$，(k_1,l_1) 是对应的悬挂边，$k_2=\min\{r\mid r$ 是 $T-k_1$ 的悬挂顶点$\}$，(k_2,l_2) 为对应的悬挂边. 继续这一过程，最后令 $k_{n-2}=\min\{r\mid r$ 是 $(T-\{k_1,k_2,\cdots,k_{n-3}\})$ 的悬挂顶点$\}$，(k_{n-2},l_{n-2}) 为对应的悬挂边. $(l_1,l_2,\cdots,l_{n-2})$

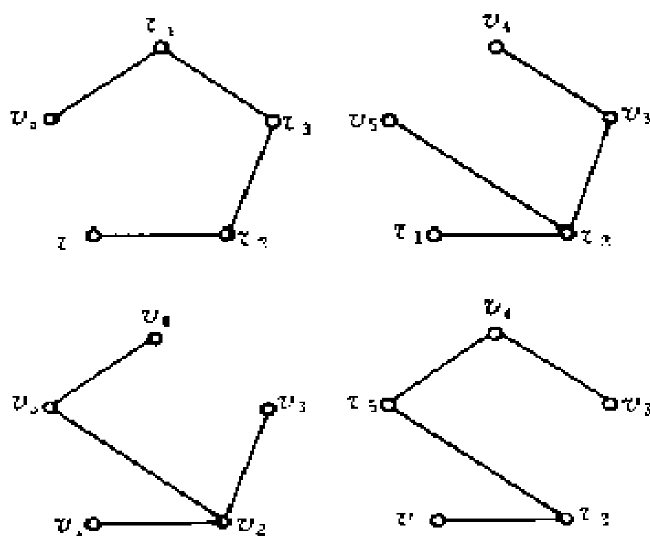


图　9.5

为 T 对应的序列.

(2) 反之，任给由 $\{1,2,\cdots,n\}$ 中元素组成的长为 $n-2$ 的一个序列 $\{l_1,l_2,\cdots,l_{n-2}\}$，令 $k_1=\min\{r\mid r\in V-\{l_1,l_2,\cdots,l_{n-2}\}\}$，在 K_n 中令 k_1 与 l_1 相邻. 再令 $k_2=\min\{r\mid r\in V-\{k_1\}-\{l_2,l_3,\cdots,l_{n-2}\}\}$，让 k_2 与 l_2 相邻，如此反复进行，直到得 $k_{n-2}=\min\{r\mid r\in V-\{k_1,k_2,\cdots,k_{n-3}\}-\{l_{n-2}\}\}$，令 k_{n-2} 与 l_{n-2} 相邻. 最后让 $V-\{k_1,k_2,\cdots,k_{n-2}\}$ 中的两个元素相邻，得到的 K_n 的子图是生成子图，由构造可知它是连通的且无回路，所以得的图是 K_n 生成树.

由(1)可知，不同的生成树对应的序列是不同的，而由 $\{1,2,\cdots,n\}$ 中元素只能产生 n^{n-2} 个各不相同的序列，由此可知，K_n 中生成树的个数 $\tau(K_n)\leqslant n^{n-2}$. 而由(2)可知，不同的序列对应的生成树不同，因而 $\tau(K_n)\geqslant n^{n-2}$，于是 $\tau(K_n)=n^{n-2}$.

其实，由(1)、(2)可知，由生成树求序列和由序列求生成树的过程是唯一确定的，因而 K_n 中的生成树与长为 $n-2$ 的序列是一一对应的，由于 V 中元素共可生成 n^{n-2} 个不同的序列，所以 $\tau(K_n)=n^{n-2}$. ▌

【例 9.4】 图 9.6(a)所示的图为 K_8 的一棵生成树，求它所对

应的长为 6 的序列，再求序列(3,2,7,8,2,5)对应的生成树.

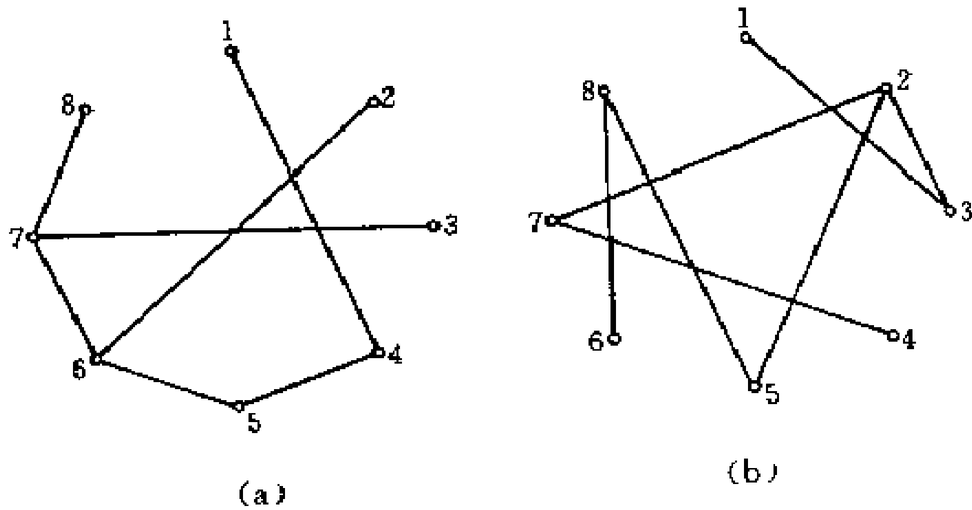


图 9.6

解 容易求出图 9.6(a)这棵树对应的序列为(4,6,7,5,6,7),序列(3,2,7,8,2,5)对应的生成树为图 9.6 中(b)所示.

设 G_1,G_2,G_3 分别为 4,5,6 阶无向简单标定图，由定理 9.7 可知，它们的生成树个数分别不会超过 16 棵、125 棵和 1296 棵.

§9.3 环路空间

设无向标定图 $G=\langle V,E\rangle$ 无孤立顶点. $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$, $E=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$. 若将 $\varnothing$ 也看成 G 的边导出子图，则 G 共有 2^m 个不同的边导出子图，并设 $G_1,G_2,\cdots,G_{2^m}$ 为 2^m 个边导出子图，记

$$\Omega=\{G_1,G_2,\cdots,G_{2^m}\}.$$

设 $g_i=G[e_i]$, $i=1,2,\cdots,m$, 并记

$$M=\{g_1,g_2,\cdots,g_m\},$$

则有下面定理:

定理 9.8 Ω 对环和运算及数乘运算: $0\cdot G_i=\varnothing$, $1\cdot G_i=G_i$, $i=1,2,\cdots,2^m$, 构成数域 $F=\{0,1\}$ 上的 m 维线性空间，其 M 为生成元集.

本定理的证明留作习题.

下面讨论 Ω 的两个特殊的子空间，首先讨论环路空间，为此先给出环路的概念及性质.

定义 9.5 设 G 为一个无向图，称 G 中圈或若干个（当然是有限个）边不重的圈的并为**环路**. 规定 $\varnothing$ 为环路.

从定义不难看出，图中圈、简单回路都是环路，但环路不一定是回路，因为环路可以不连通.

定理 9.9 设 T 是 n 阶 m 条边的无向连通图 G 的一棵生成树，C_k 是对应弦 e_k' 的基本回路，$k=1,2,\cdots,m-n+1$，则任意的 r $(1\leqslant r\leqslant m-n+1)$ 条弦 $e_{i_1}',e_{i_2}',\cdots,e_{i_r}'$ 均在

$$C_{i_1}\oplus C_{i_2}\oplus\cdots\oplus C_{i_r}.$$

中，其中 $\oplus$ 为图之间的环和运算.

证明 由定理 9.4 本定理得证. ▌

定理 9.10 设 C_1 和 C_2 是无向图 G 中的任意两个回路（初级的或简单的），则环和 $C_1\oplus C_2$ 为 G 中环路.

证明 若 $C_1=C_2$，则 $C_1\oplus C_2=\varnothing$，$\varnothing$ 为环路，下面讨论 C_1 与 C_2 不同的情况. 由于 C_1 与 C_2 不同，因而至少存在一条边在 C_1 中而不在 C_2 中，同样至少存在一条边在 C_2 中而不在 C_1 中，于是应有 $E(C_1)\oplus E(C_2)\neq\varnothing$（注意本式中 $\oplus$ 为集合的对称差运算），因而 $C_1\oplus C_2\neq\varnothing$. 下面证明 $C_1\oplus C_2$ 的各连通分支都是欧拉图，只要证明 $\forall\, v\in V(C_1\oplus C_2)$，$d_{C_1\oplus C_2}(v)$ 为非 0 偶数. 若 $v\in V(C_1)\wedge v\notin V(C_2)$ 或 $V\notin V(C_1)\wedge v\in V(C_2)$ 结论是显然的，下面只就 $v\in V(C_1)\wedge v\in V(C_2)$ 的情况进行讨论. 若 v 关联的边中有环 e，若 e 只在 C_1 中或只在 C_2 中，则 e 作为圈在 $C_1\oplus C_2$ 中，若 e 既在 C_1 中又在 C_2 中，则 $e\notin E(C_1\oplus C_2)$，因而环不影响 $d_{C_1\oplus C_2}(v)$ 的奇偶性，下面仅设与 v 关联的边中无环. 设 C_1 中有 r 条边与 v 关联，C_2 中有 s 条边与 v 关联，其中有 t 条边既在 C_1 中又在 C_2 中，易知 $r\geqslant 2,s\geqslant 2,r,s$ 均为偶数，并且 $t\leqslant\min\{r,s\}$，于是，$d_{C_1\oplus C_2}(v)=s+r-2t>0$ 且为偶数. 于是 $C_1\oplus C_2$ 的各连通分支均为欧拉图. 由定理 8.1 可知，各

连通分支为若干个边不重的圈的并，于是 $C_1 \oplus C_2$ 为若干个边不重的圈的并，即 $C_1 \oplus C_2$ 为环路. ▌

推论 设 C_1、C_2 为无向图 G 中的两个环路，则 $C_1 \oplus C_2$ 为 G 中环路(即环路对环和运算是封闭的).

定理 9.11 设 G 为无向连通图，T 为 G 的任意一棵生成树，则 G 中任一回路(初级的或简单的)或为 T 的基本回路或为若干个基本回路的环和.

证明 设 C 为 G 中一回路，若 C 中只含 T 的一条弦，则 C 必为 T 对应的一个基本回路. 设 C 中含 T 的 $l(l \geqslant 2)$ 条弦，设为 e_{i_1}'，e_{i_2}'，$\cdots$，e_{i_l}'，由定理 9.9 可知它们全在 $C'' = C_{i_1} \oplus C_{i_2} \oplus \cdots \oplus C_{i_l}$ 中，其中 C_{i_j} 为弦 e_{i_j}' 对应的基本回路. 由定理 9.10 及其推论易证 C'' 是环路，并且 C'' 中除含弦 e_{i_1}'，e_{i_2}'，$\cdots$，e_{i_l}' 外，其余的边均为树枝. 于是若 $C \oplus C'' \neq \varnothing$，则 $C \oplus C''$ 中全为 T 的树枝，因而 $C \oplus C''$ 不可能是环路，这与定理 9.10 的推论矛盾，于是 $C \oplus C'' = \varnothing$，即 $C = C''$，因而 C 为若干个基本回路的环和. ▌

由定理 9.11，容易证明以下推论.

推论 1 无向连通图 G 中任一环路或为某棵生成树的基本回路，或为若干个基本回路的环和.

推论 2 设 G 是 n 阶 m 条边的无向连通图，设 G 中有 s 个回路(初级的或简单的)，则

$$m - n + 1 \leqslant s \leqslant 2^{m-n+1} - 1.$$

推论 3 设 G 是 n 阶 m 条边的无向连通图，设 s 是 G 中环路数(含 $\varnothing$)，则

$$S = 2^{m-n+1}.$$

定理 9.12 设 G 为 n 阶 m 条边的无向连通图，设 $C_{环}$ 为 G 中环路(含 $\varnothing$)组成的集合，则 $C_{环}$ 是 Ω 的 $m-n+1$ 维的子空间，其中 Ω 是 G 的所有边导出子图的集合.

证明 只要证明下面两点.

(1) 证明环路对环和运算是封闭的.

由定理9.10推论(1)得证.

(2) 设 T 是 G 中任意一棵生成树，设 $C_{基}=\{C_1,C_2,\cdots,C_{m-n+1}\}$ 是 T 对应的基本回路系统. 证明 $C_{基}$ 是 $C_{环}$ 的基. 又只需证明两点：

① 任意的 $C\in C_{环}$，C 可由 $C_{基}$ 中元素生成.

由定理9.11的推论1，①可证.

② 证 $C_{基}$ 中元素线性无关.

若存在不全为0的 $a_i\in F=\{0,1\}$，$i=1,2,\cdots,m-n+1$，使得

$$a_1C_1\oplus a_2C_2\oplus\cdots\oplus a_{m-n+1}C_{m-n+1}=\varnothing.$$

不妨设 $a_1=1$，设弦 e_1 在 C_1 中，则 $e_1\notin E(C_i)(i\geq 2)$，于是上式左端含 e_1，而右端为 $\varnothing$，这是个矛盾，于是 $C_1,C_2,\cdots,C_{m-n+1}$ 是线性无关的. ▌

【例9.5】 设图 G 如图9.7所示，求 G 的环路空间 $C_{环}$，并指出 $C_{环}$ 中哪些为回路.

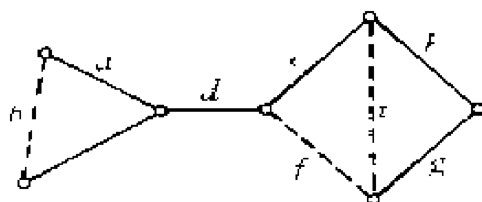


图 9.7

解 设 G 中实线边所示的子图为 G 的一棵生成树. 弦 b,f,i 对应的基本回路分别为

$$C_b=bca,\ C_f=fghe,\ C_i=igh,$$

$C_{基}=\{C_b,C_f,C_i\}$

$C_b\oplus C_f=C_b\cup C_f$

$C_b\oplus C_i=C_b\cup C_i$

$C_f\oplus C_i=fie$

$C_b\oplus C_f\oplus C_i=C_b\cup fie$

$C_{环}=\{\varnothing,C_b,C_f,C_i,C_b\cup C_f,C_b\cup C_i,fie,C_b\cup fie\}$

$C_{基}$ 中的回路为 C_3,C ,C, fie.

§9.4 断集空间

定义 9.6 设 $G=\langle V,E\rangle$ 为一个无向图，$V_1\subset V$ 且 $V_1\neq\varnothing$，记 $\bar{V}_1=V-V_1$，称 $\{(u,v)\mid u\in V_1\wedge v\in \bar{V}_1\}$ 为 G 中的一个**断集**，记作 $E(V_1\times\bar{V}_1)$，简记作 $(V_1,\bar{V}_1)$.

由定义不难看出，割集是断集，但断集不一定是割集.

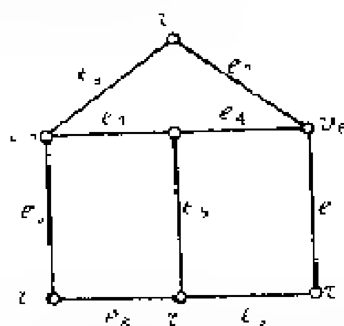


图 9.8

在图 9.8 中，取 $V_1=\{v_1\}$，则 $(V_1,\bar{V}_1)=\{e_1,e_2\}$，取 $V_2=\{v_4,v_7\}$，则 $(V_2,\bar{V}_2)=\{e_3,e_4,e_8,e_9\}$，取 $V_3=\{v_2,v_6\}$，则 $(V_3,\bar{V}_3)=\{e,e_3,e_6,e_9,e_5,e_8\}$，以上 3 个断集中，只有 $(V_3,\bar{V}_3)$ 不是割集.

设 G 是 n 阶 m 条边的无向连通图，又设 $S_{断}$ 是 G 中所有断集的导出子图及 $\varnothing$ 组成的集合. 下面证明 $S_{断}$ 是 $\Omega(G$ 的全体边导出子图集合)的 $n-1$ 维子空间，为此先证下面定理.

定理 9.13 连通图 G 中每个割集至少包含 G 的每棵生成树的一个树枝.

证明是简单的.

定理 9.14 设 G 是 n 阶 m 条边的无向连通图，T 是 G 的一棵生成树，$S_{基}$ 为 T 对应的基本割集系统，则对于任意的 $S_{i_1},S_{i_2},\cdots,S_{i_k}\in S_{基}$，必有它们对应的树枝 $e_{i_1}',e_{i_2}',\cdots,e_{i_k}'$ 均在

$$S_{i_1}\oplus S_{i_2}\oplus\cdots\oplus S_{i_k}$$

中，其中⊕为对称差运算.

由基本割集的定义本定理得证.

定理 9.15 设 S_1, S_2 为无向图 G 的两个断集，则 $S_1 \oplus S_2$ 为 G 中断集，其中⊕为对称差运算.

证明 若 $S_1 = S_2$，结论显然成立. 设 $S_1 \neq S_2$，并设 $S_1 = (V_1, \bar{V}_1)$，$S_2 = (V_2, \bar{V}_2)$，见图 9.9 所示，从示意图中不难看出，图中虚线边均既在 S_1 中又在 S_2 中，因而它们不在 $S_1 \oplus S_2$ 中，而图中的实线边，垂直方向的只在 S_1 中，水平方面的只在 S_2 中，于是实线边均在 $S_1 \oplus S_2$ 中，于是取

$$V_* = (V_1 \cap \bar{V}_2) \cup (\bar{V}_1 \cap V_2),$$

则

$$\bar{V}_* = (V_1 \cap V_2) \cup (\bar{V}_1 \cap \bar{V}_2),$$

则 $S_1 \oplus S_2 = (V_*, \bar{V}_*)$ 为 G 中断集. ∎

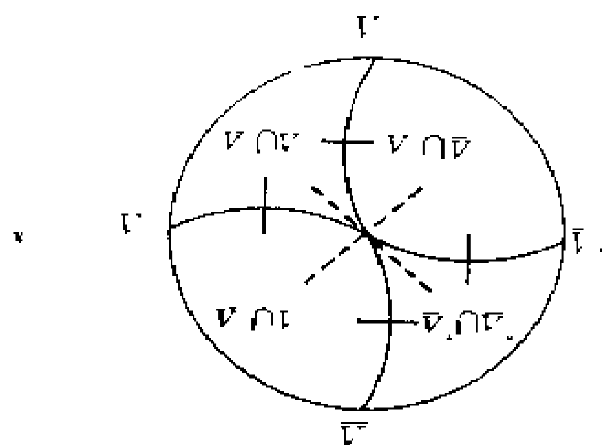


图 9.9

定理 9.16 设 G 为无向连通图，T 为 G 的任意一棵生成树，则 G 中任一断集或为 T 的基本割集或为若干个基本割集的对称差集.

证明 设 S 为 G 中任意一个断集，则 S 中至少含 T 的一个树枝（见定理 9.13）. 设 S 中含 $r(1 \leqslant r \leqslant n-1)$ 条树枝 $e_1', e_2', \cdots e_r'$，并设它们对应的基本割集分别为 $S_1, S_2, \cdots, S_r$. 令

$$S'=S_1\oplus S_2\oplus\cdots\oplus S_r.$$

其中$\oplus$为对称差运算. 由定理 9.15 可知 S'是断集，并且由定理 9.14知道，e_1'，e_2'，…，e_r'均在 S'中. 考虑 $S'\oplus S$. 由定理 9.15 知 $S'\oplus S$ 是断集，又因为 e_1'，e_2'，…，e_r'既在 S 中，又在 S'中，所以它们不在 $S'\oplus S$ 中. 于是 $S'\oplus S$ 只有两种可能：$S'\oplus S\neq\varnothing$，这时 $S'\oplus S$ 中应均为弦，这与它为断集矛盾，因而必有 $S'\oplus S=\varnothing$，这正说明 $S=S'$，即 S 为 r 个基本割集的对称差集. ▎

由定理 9.15 和 9.16 不难证明下面定理.

定理 9.17 设 G 为 n 阶 m 条边的无向连通图，并设 $S_{断}=\{\varnothing\}\cup\{S'\mid S'$是$G$的断集的导出子图$\}$，则 $S_{断}$ 为 Ω 的 $n-1$ 维子空间，其中 Ω 是 G 的所有边导出子图集合.

【例 9.6】 无向图 G 如图 9.10 所示. 求 G 的断集空间 $S_{断}$，并指出其中的割集.

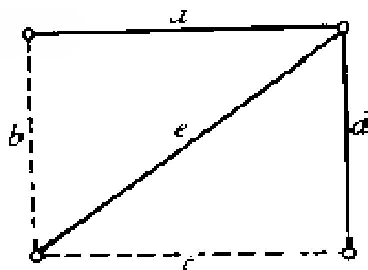


图 9.10

解 设图中实线边所示的图为 G 的一棵生成树. a，e，d 为 T 的树枝，对应的基本割集分别为 $S_a=\{a,b\}$，$S_d=\{d,c\}$，$S_e=\{e,b,c\}$.

$S_a\oplus S_e=\{a,e,c\}$，

$S_a\oplus S_d=\{a,b,c,d\}$，

$S_e\oplus S_d=\{b,e,d\}$，

$S_a\oplus S_e\oplus S_d=\{a,e,d\}$，

$S_{断}=\{\varnothing,S_a,S_d,S_e,S_a\oplus S_e,S_a\oplus S_d,S_e\oplus S_d,S_a\oplus S_e\oplus S_d\}$.

其中，只有 $S_a\oplus S_d=\{a,b,c,d\}$不是割集，其余的均为割集.

§9.5 根　　树

若有向图 D 的基图是无向树，则称 D 为**有向树**，也常用 T 表示有向树．在所有的有向树中，最重要的是根树．

定义 9.7　若有向树 T 是平凡树或 T 中有一个顶点的入度为 0，其余顶点的入度均为 1，则称 T 为**根树**．入度为 0 的顶点称为**树根**，入度为 1 出度为 0 的顶点称为**树叶**，入度为 1 出度不为 0 的顶点称为**内点**，内点和树根统称为**分支点**．从树根到 T 的任一顶点 v 的通路（路径）长度称为 v 的**层数**，层数最大的顶点的层数称为**树高**．

在根树中，由于各有向边的方向的一致性，因而画根树时，省掉有向边的箭头，并将树根放在最上方．图 9.11 给出了一棵高为 4 的根树，v 为它的树根，它有 5 片树叶，4 个分支点，其中有 3 个是**内点**．

定义 9.8　设 T 为一颗根树，$v_i, v_j \in V(T)$，若 v_i 可达 v_j，则称 v_i 是 v_j 的**祖先**，v_j 是 v_i 的**后代**；若 v_i 邻接到 v_j，则称 v_i 是 v_j 的**父亲**，v_j 是 v_i 的**儿子**；若 v_j, v_k 的父亲相同，则称 v_j, v_k 是**兄弟**．

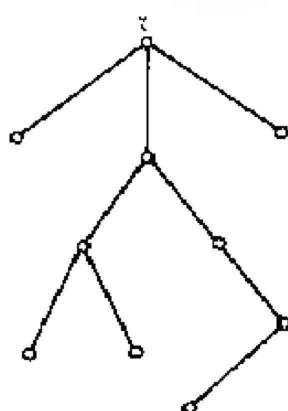


图　9.11

定义 9.9　设 T 是一棵根树，若将 T 的层数相同的顶点都标定上次序，则称 T 为**有序树**．

定义 9.10 设 T 为一棵根树.

(1) 若 T 的每个分支点至多有 r 个儿子,则称 T 为 **r 叉树**;

(2) 若 T 的每个分支点都恰好有 r 个儿子,则称 T 为 **r 叉正则树**;

(3) 若 T 是 r 叉正则树且每个树叶的层数均为树高,则称 T 为 **r 叉完全正则树**;

(4) 若 T 是 r 叉树且为有序树,则称 T 为 **r 叉有序树**;

(5) 若 T 是 r 叉正则树且为有序树,则称 T 为 **r 叉正则有序树**;

(6) 若 T 是 r 叉完全正则树且是有序的,则称 T 是 **r 叉完全正则有序树**;

2 叉有序树和 2 叉正则有序树在数据结构中居重要地位.

定义 9.11 设 T 为一棵根树,$v \in V(T)$,称 v 及其后代的导出子图 T_v 为 T 的以 v 为根的**根子树**.

2 叉正则有序树的每个分支点的两个儿子导出的根子树分别称为该分支点的**左子树**和**右子树**.

对一棵根树的每个顶点都访问且仅访问一次称为行遍一棵根树或**周游一棵根树**. 设 T 是一棵 2 叉正则有序树,按对树根、左子树、右子树的不同的访问顺序主要有以下 3 种行遍方法:

(1) 先左子树,再树根,再右子树的行遍方法称为**中序行遍法**.

(2) 先树根,再左子树,再右子树的行遍方法称为**前序行遍法**.

(3) 先左子树,再右子树,再树根的行遍方法称为**后序行遍法**.

四则运算表达式可以存储在 2 叉正则有序树上:参加运算的数放树叶上,并规定被减数、被除数放左子树上,减数、除数放右子树上,分支点上放相应的运算符号,从某两片树叶开始按从低到高运算层次的顺序开始存放,树根应该放的是最高层次的运算符. 然

后根据不同的行遍方法访问根树 T，可以得到四则运算的不同的表达方法，从而得到不同的算法.

(1) 按中序行遍法访问 T，可以还原算式，其特点是运算符夹在两个参加运算的数之间，故称所得算式的表示法为**中缀符号法**.

(2) 按前序行遍法访问 T，在所得表达式中规定，每个运算符对它后面紧邻的两个数进行运算，并可以省掉表达式中的全部括号，称此种表达算式的方法为**前缀符号法**，或称**波兰符号法**.

(3) 按后序行遍法访问 T，在所得的表达式中规定，每个运算符对它前面紧邻的两个数进行运算，仍可以省去全部括号，称这种表达算式的方法为**后缀符号法**或**逆波兰符号法**.

【例 9.7】 设有算式

$$((a*(b+c))*d-e)-(f+g)\div(h*(i+j)),$$

(1) 将以上算式存入一棵 2 叉正则有序树 T 中；

(2) 分别写出上式的波兰符号法和逆波兰符号法表达的形式.

解 (1) 树 T 如图 9.12 所示.

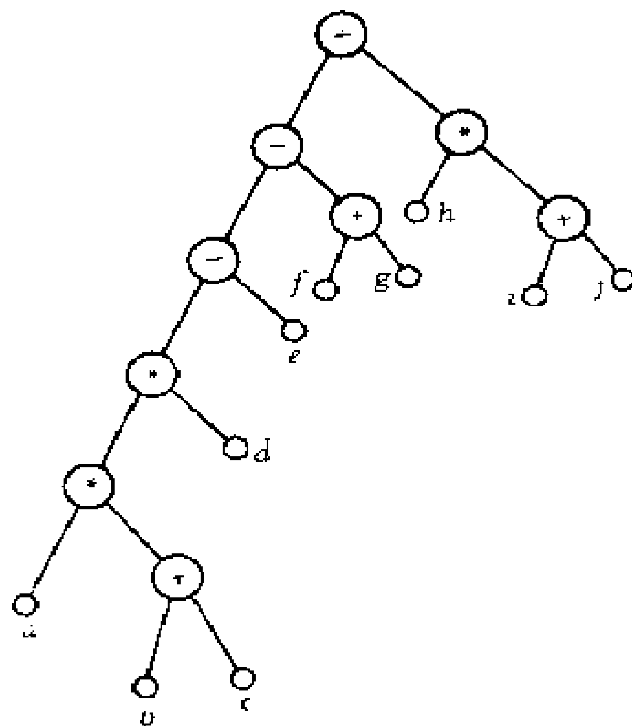


图 9.12

(2) 波兰符号法表达的形式为

$$\div : \ * * a + bcde + fg * h + ij.$$

逆波兰符号法表达的形式为

$$abc + * d * e \ fg + \div hij + * : .$$

习 题 九

1. 画出所有 7 阶非同构的无向树.

2. 无向树 T 有 9 片树叶，3 个 3 度顶点，其余顶点的度数均为 4，问 T 中有几个 4 度顶点？根据 T 的度数列，你能画出多少棵非同构的无向树？

3. 一棵无向树 T，有 n_i 个 i 度顶点，$i=2,3,\cdots,k$，其余顶点都是树叶，问 T 有几片树叶？

4. 设 T 是 $k+1$ 阶无向树，G 为无向简单图，且 $\delta(G)\geq k$，证明 G 中存在与 T 同构的子图.

5. 设 T_1,T_2 是无向树 T 的子图并且都是树，令 $T_3=G[E(T_1)\cap E(T_2)]$，$E(T_1)\cap E(T_2)\neq\varnothing$，证明 T_3 也是 T 的树.

6. 设 G 为 $n(n\geq 5)$ 阶简单图，证明 G 或 $\overline{G}$ 中必含圈.

7. 已知 n 阶 m 条边的无向图 G 为 $k(k\geq 2)$ 个连通分支的森林，证明 $m=n-k$.

8. 设 $d_1,d_2,\cdots,d_n$ 是 $n(n\geq 2)$ 个正整数，已知 $\sum_{i=1}^{n} d_i=2n-2$，证明存在一棵顶点度数分别为 $d_1,d_2,\cdots,d_n$ 的无向树.

9. 无向连通标定图 G 如图 9.13 所示，求 $\tau(G)$，并画出全体不同的生成树.

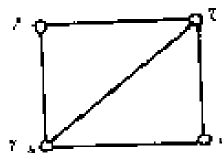


图 9.13

10. 实边所示的子图为图 9.14 所示图的一棵生成树 T，求 T 对应的基本回路系统和基本割集系统.

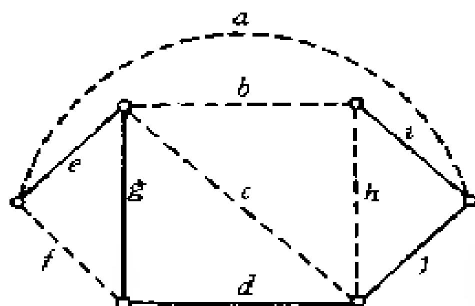


图 9.14

11. 设 T 为非平凡的无向树，$\Delta(T)\geq k$，证明 T 至少有 k 片树叶。

12. 设 C 为无向图 G 中一个圈，e_1, e_2 为 C 中的两条边，证明 G 中存在割集 S，使得 $e_1, e_2 \in S$。

13. 设 T_1, T_2 是无向连通图 G 的两棵生成树。已知 $e_1 \in E(T_1)$ 但 $e_1 \notin E(T_2)$，证明存在 $e_2 \in E(T_2)$ 但 $e_2 \notin E(T_1)$，使得 $(T_1 - e_1) \cup \{e_2\}$，$(T_2 - e_2) \cup \{e_1\}$ 都是 G 的生成树。

14. 设 K_n 是 n 阶标定无向完全图，e 为 K_n 中的一条边，证明 $\tau(K_n - e) = (n-2)n^{n-3}$。

15. 证明定理 9.8。

16. 求图 9.15 所示图的环路空间 $C_{环}$ 和断集空间 $S_{断}$。

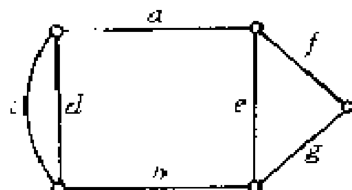


图 9.15

17. 证明：一棵有向树 T 是根树当且仅当 T 中有且仅有一个顶点的入度为 0。

18. 画出 6 阶所有非同构的根树。

19. 设 T 是 2 叉正则树，i 是分支点数，I 是各分支点的层数之和，L 是各树叶的层数之和，证明 $L = I + 2i$。

20. 设 T 是 2 叉正则树，有 t 片树叶，i 个分支点，证明 T 的边数 $m = 2t - 2$。

21. 求算式

$$((a+(b*c)*d)-e)\div(f+g)+(h*i)*j$$

的波兰符号法和逆波兰符号法表示。

第十章　图的矩阵表示

图中顶点与边之间的关联关系、顶点与顶点之间的相邻或邻接关系、顶点之间的连通或可达关系、边与环路和边与断集之间的属于关系等都可以用矩阵来描述. 通过图的矩阵表示，可以清楚地观察到已讨论过的图的性质，并进一步发现一些其它性质，能准确地计算出图中任一顶点之间不同长度的通路(或回路)数. 更重要的是在图的应用中，图的矩阵表示起着极其重要的作用.

为了方便起见，在图的某些矩阵表示中，对图加以一些限制，如限制所讨论的为简单图，或无环的图，限制矩阵中的元素为 0，1(或 -1)，所用运算均在数域 $F=\{0,1\}$ 上进行，并且加法使用模 2 加法等. 在以下的讨论中，对每种矩阵采取什么限制都要一一加说明，请读者注意阅读每节开头的说明.

在图的矩阵表示中，要求图是标定图.

§10.1　关 联 矩 阵

本节内要求讨论的图均是顶点和边均是标定的，并且要求图是无环图. 还要求运算在数域 $F=\{0,1\}$ 上进行，加法使用模 2 加法.

定义 10.1　设 $D=\langle V,E\rangle$ 为无环有向图，$V=\{V_1,V_2,\cdots,V_n\}$，$E=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$，令

$$m_{ij}=\begin{cases}1, & v_i \text{ 是 } e_j \text{ 的始点},\\ 0, & v_i \text{ 与 } e_j \text{ 不关联},\\ -1, & v_i \text{ 是 } e_j \text{ 的终点},\end{cases}$$

称$[m_{ij}]_{n\times m}$为 D 的**关联矩阵**，记作 $M(D)$.

图 10.1 所示有向图的关联矩阵为

$$
M(D)\quad
\begin{array}{c}
 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}\right]
\end{array}
$$

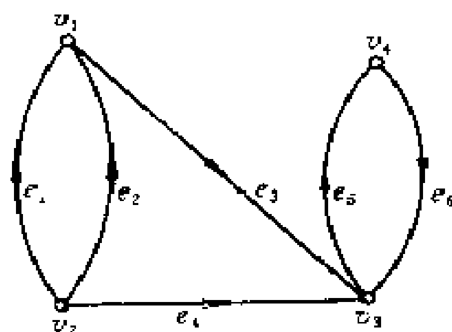


图 10.1

不难看出 D 与 $M(D)$ 是相互唯一确定的，因而由 $M(D)$ 的特征可确定 D 的性质.

(1) D 每列元素之和为 0，即 $\sum_{i=1}^{n} m_{ij} = 0$，这正说明 D 中每条边关联两个顶点，一个始点，一个终点.

(2) 第 i 行元素绝对值之和等于 $d(v_i)$，即 $\sum_{j=1}^{m} |m_{ij}| = d(v_i)$，而其中 1 的个数为 $d^+(v_i)$，-1 的个数为 $d^-(v_i)$.

(3) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_{ij} = 0$，因而 1 的个数与 -1 的个数相等，都等于 m，这正说明 D 中各顶点入度之和等于顶点出度之和，都等于 m，于是各顶点度数之和等于 $2m$，这是有向图 D 的握手定理的全部内容.

(4) 若 $M(D)$ 中两列相同，说明 D 中这两列对应的边有相同的始点和终点，因而它们是平行边.

总之，$M(D)$ 能反映 D 的一切特征.

定义 10.2 设无环无向图 $G = \langle V, E \rangle$，$V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$，$E = \{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$，令

$$
m_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \text{ 与 } e_j \text{ 关联}, \\ 0, & \text{否则}, \end{cases}
$$

称 $[m_{ij}]_{n\times m}$ 为 G 的关联矩阵，记作 $M(G)$.

图 10.2 所示无向图 G 的关联矩阵为

$$
M(G)=\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

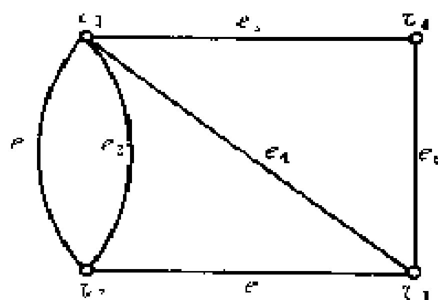


图 10.2

同有向图的关联矩阵类似，$M(G)$与G也是相互唯一确定的，因而$M(G)$也描述了G的一切特征，下面几点是容易看出的：

(1) $M(G)$中每行元素之和为2，即$\sum_{i=1}^{n} m_{ij}=2$，这正说明G中每条边有唯一的两个端点.

(2) $M(G)$中第i行中1的个数$\sum_{j=1}^{m} m_{ij}=d(v_i)$.

(3) $M(G)$中第i行中1对应的边组成的集合为v_i的关联集，此关联集为G中一个断集，当v_i不是割点时，此断集为扇形割集.

(4) $M(G)$中，若两列相同，则它们对应的边为平行边.

(5) 若G有$k(k\geq 2)$个连通分支，则G的关联矩阵$M(G)$有如下形式.

$$
M(G)=\begin{bmatrix}
M(G_1) & & & \\
& M(G_2) & & \\
& & \ddots & \\
& & & M(G_k)
\end{bmatrix}
$$

其中$M(G_r)$为G的第r个连通分支的关联矩阵，$r=1,2,\cdots,k$.

利用定理 9.6 和 9.7 可以求出无向连通标定图中生成树的个数，利用关联矩阵还可以求出所有不同的生成树，为此再给出基本关联矩阵的概念.

定义 10.3 设$M(G)$是无向连通图G(G当然是无环标定图)的关联矩阵，从$M(G)$中删除任意一行所得矩阵称为G的**基本关联矩阵**，记作$M_f(G)$. 并称被删行所对应的顶点为**参考点**.

定理 10.1 n 阶无向连通图 G 的关联矩阵的秩 $r(M(G))=n-1$.

证明 因为 $M(G)$ 中每行中 1 对应的边组成 G 中一个断集 $\in S_{断}$，由定理 9.17 可知，$r(M(G))\leq n-1$. 下面证明 $r(M(G))\geq n-1$. 取 $M(G)$ 的前 $n-1$ 行，设为 $M_1,M_2,\cdots,M_{n-1}$，则它们是线性无关的. 否则必存在不全为 0 的 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-1}\in F=\{0,1\}$，在模 2 加法意义下，使得 $\sum_{i=1}^{n}k_iM_i$ 为零向量. 不妨设 $k_1=k_2=\cdots=k_s=1$，而 $k_{s+1}=k_{s+2}=\cdots=k_{n-1}=0$，这里 $s\neq 1$，否则 M_1 为零向量，于是 v_1 为孤立点，这与 G 连通矛盾，所以必有 $2\leq s\leq n-1$. 易知，在 $M(G)$ 子阵

$$M'=\begin{bmatrix}M_1\\M_2\\\vdots\\M_s\end{bmatrix}$$

中，每列恰有两个 1 或每列的元素全为 0. 在 G 中取 $V_1=\{v_1,v_2,\cdots,v_s\}$，$V_2=V(G)-V_1$，则 $V_1\cap V_2=\varnothing$，且 V_1,V_2 组成的断集 $(V_1,V_2)=\varnothing$，这说明 G 中至少有 2 个连通分支，这与 G 是连通图矛盾，所以 $M_1,M_2,\cdots,M_{n-1}$ 线性无关，因而 $r(M(G))\geq n-1$，于是 $r(M(G))=n-1$.

类似可证下面定理.

定理 10.2 n 阶无向连通图 G 的基本关联矩阵的秩 $r(M_f(G))=n-1$.

由以上两个定理容易得出下面推论.

推论 1 设 n 阶无向图 G 有 p 个连通分支，则 $r(M(G))=r(M_f(G))=n-p$，其中 $M_f(G)$ 是从 $M(G)$ 的每个对角块中删除任意一行而得到的矩阵.

推论 2 G 是连通图当且仅当 $r(M(G))=r(M_f(G))=n-1$.

定理 10.3 设 $M_f(G)$ 是 n 阶连通图 G 的一个基本关联矩阵.

M_f' 是 $M_f(G)$ 中任意 $n-1$ 列组成的方阵，则 M_f' 中各列所对应的边集 $\{e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_{n-1}}\}$ 的导出子图 $G[\{e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_{n-1}}\}]$ 是 G 的生成树当且仅当 M_f' 的行列式 $|M_f'| \neq 0$.

证明

必要性.

因为 $G[\{e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_{n-1}}\}]$ 是 n 阶树，因而是连通的，所以 M_f' 是这棵生成树的基本关联矩阵，由定理 10.2 知 $r(M_f') = n-1$，这说明 M_f' 是满秩矩阵，所以 $|M_f'| \neq 0$.

充分性.

显然 $G[\{e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_{n-1}}\}]$ 是 $n-1$ 条边的 G 的生成子图，并且 M_f' 是它的基本关联矩阵，因而 $|M_f'| \neq 0$，故 $r(M_f') = n-1$，由推论 2 可知它又是连通的，由定理 9.1 可知它是 G 的生成树. ∎

【例 10.1】 求图 10.3 所示标定图的所有生成树.

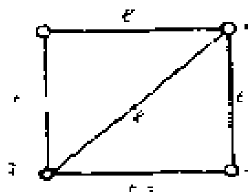


图 10.3

解 图 10.3 的关联矩阵为

$$M = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

取 v_4 为参考点，得基本关联矩阵为

$$M_f = \begin{array}{c} \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

求 M_f 的所有 3 阶子方阵的行列式，要求计算结果属于 $F\{0,1\}$，子方阵的个数为 $C_5^3=10$，它们的行列式依次为

$$(1)\quad \overset{\begin{matrix}e_1 & e_2 & e_3\end{matrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}}=1,\qquad (2)\quad \overset{\begin{matrix}e_1 & e_2 & e_4\end{matrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}}=1,$$

$$(3)\quad \overset{\begin{matrix}e_1 & e_2 & e_5\end{matrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}}=0,\qquad (4)\quad \overset{\begin{matrix}e_1 & e_3 & e_4\end{matrix}}{\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}}=1,$$

$$(5)\quad \overset{\begin{matrix}e_1 & e_3 & e_5\end{matrix}}{\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}}=-1=1(\mathrm{mod}\,2),$$

$$(6)\quad \overset{\begin{matrix}e_1 & e_4 & e_5\end{matrix}}{\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}}=-1=1(\mathrm{mod}\,2),$$

$$(7)\quad \overset{\begin{matrix}e_2 & e_3 & e_4\end{matrix}}{\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}}=1,\qquad (8)\quad \overset{\begin{matrix}e_2 & e_3 & e_5\end{matrix}}{\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}}=-1=1(\mathrm{mod}\,2),$$

$$(9)\quad \overset{\begin{matrix}e_2 & e_4 & e_5\end{matrix}}{\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}}=-1=1(\mathrm{mod}\,2),\qquad (10)\quad \overset{\begin{matrix}e_3 & e_4 & e_5\end{matrix}}{\begin{vmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}}=1.$$

从以上计算结果中，在所有 3 条边的组合中，除 e_1,e_2,e_5 和 e_3,e_4,e_5 的导出子图不是 G 的生成树外，其余的 3 条边的导出子图全是 G 的生成树. 这些生成树在图 10.4 中依次列出.

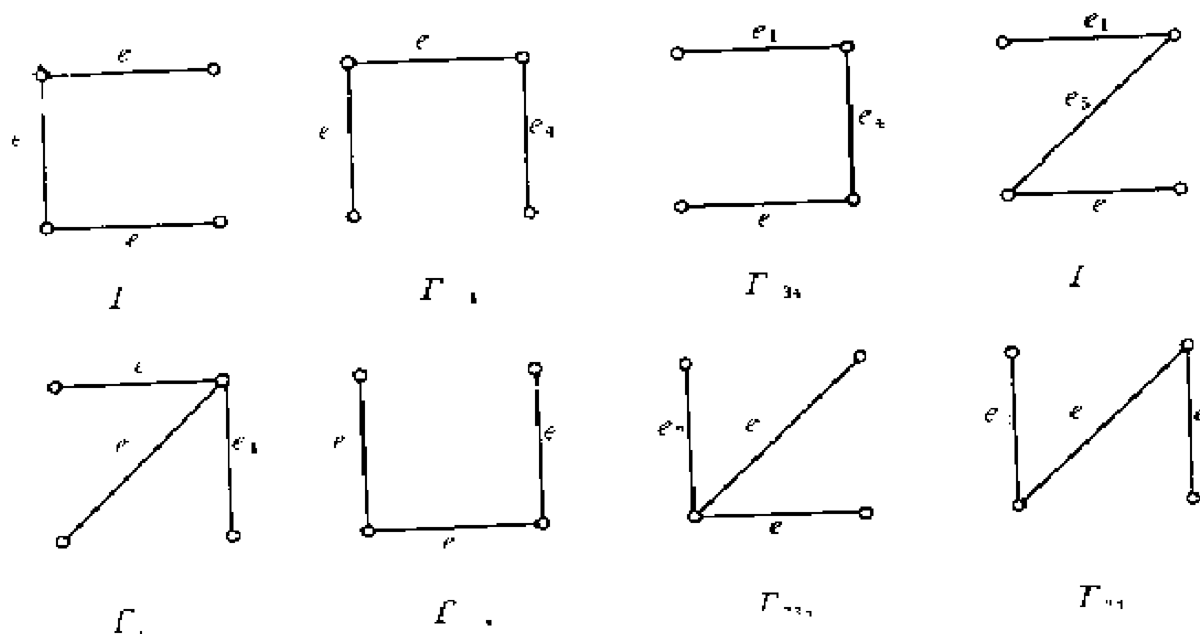


图 10.4

§10.2 邻接矩阵与相邻矩阵

本节内讨论的有向图不加限制，所讨论的无向图仅限于简单图. 矩阵运算时所用乘法和加法均为普通的乘法和加法. 本节讨论的通路与回路是定义意义下的通路与回路，并且含复杂通路与回路，回路的始(终)点不同看成是不同的.

定义 10.4 n 阶标定有向图 D 中，$V(D)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，令 $a_{ij}^{(1)}$ 为 v_i 邻接到 v_j 的边的条数，称 $[a_{ij}^{(1)}]_{n\times n}$ 为 D 的**邻接矩阵**，记作 $A(D)$，简记为 A.

给定的有向标定图 D 如图 10.5 所示，它的邻接矩阵为

$$A=\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

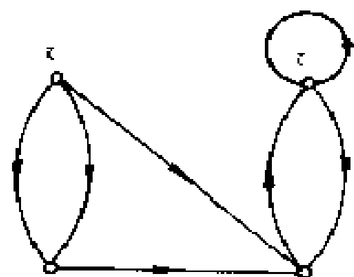


图 10.5

从定义不难看出以下性质：

(1) 第 i 行元素之和为 v_i 的出度，即 $\sum_j a_{ij}^{(1)} = d^+(v_i)$，$i=1,2,\cdots,n$，而 A 中所有元素之和为各顶点出度之和，即 $\sum_i\sum_j a_{ij}^{(1)} = \sum_i d^+(v_i) = m$，其中 m 为 D 中边数.

类似地，第 j 列元素之和为 v_j 的入度，即 $\sum_i a_{ij}^{(1)} = d^-(v_j)$，$j=1,2,\cdots,n$，而 A 中全体元素之和又为各顶点的入度之和，即 $\sum_j\sum_i a_{ij}^{(1)} = \sum_j d^-(v_j) = m$.

(2) 由(1)不难看出，$\sum_i\sum_j a_{ij}^{(1)} = \sum_i\sum_j a_{ij}$ 为 D 中长度为 1 的通路数，而 $\sum_i a_{ii}^{(1)}$ 为 D 中长度为 1 的回路数，即 D 中环的个数.
由此条性质作为基础，可以得到下面的定理.

定理 10.4 设 A 是 n 阶有向标定图的邻接矩阵，A 的 $l(l\geq 2)$ 次幂 $A^l = A^{l-1}\cdot A$ 中元素 $a_{ij}^{(l)}$ 为 v_i 到 v_j 长度为 l 的通路数，$\sum_i\sum_j a_{ij}^{(l)}$ 为 D 中长度为 l 的通路总数，而 $\sum_i a_{ii}^{(l)}$ 为中 D 长度为 l 的回路总数.

证明 对 l 作归纳法.

(1) $l=1$ 时，由讨论的性质(2)所证.

(2) 设 $l\leq k(k\geq 1)$ 时结论为真. 当 $l=k+1$ 时，A^{k+1} 中元素

$$a_{ij}^{(k+1)} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir}^{(k)}\cdot a_{rj}^{(1)},$$

由归纳假设知，$a_{ir}^{(k)}$ 为 v_i 到 v_r 长度为 r 的通路数，而 $a_{rj}^{(1)}$ 是 v_r 到 v_j 长度为 1 的通路数，所以 $a_{ir}^{(k)} \cdot a_{rj}^{(1)}$ 为 v_i 到 v_j 经过 v_r 的长度为 $(k+1)$ 的通路数，而 $\sum_{r=1}^{n} a_{ir}^{(k)} \cdot a_{rj}^{(1)}$ 为 v_i 到 v_j 长度为 $k+1$ 的通路总数. ∎

再令　　$B_r = A + A^2 + \cdots + A^r = [b_{ij}^{(r)}]_{n \times n}, r = 1, 2, \cdots,$

可以得到定理 10.4 的推论.

推论　设 A 是 n 阶有向标定图的邻接矩阵，B_r 中元素 $b_{ij}^{(r)}$ 为 v_i 到 v_j 长度小于等于 r 的通路数，$\sum_i \sum_j b_{ij}^{(r)}$ 为 D 中长度小于等于 r 的通路总数，而 $\sum_i b_{ii}^{(r)}$ 为 D 中长度小于等于 r 的回路数.

【例 10.2】　在图 10.5 所示的有向图中，求：

(1) v_2 到 v_4 长度为 3 和 4 的通路数；

(2) v_2 到 v_4 长度小于等于 4 的通路数；

(3) v_4 到 v_4(自身)长度为 4 的回路数；

(4) v_4 到 v_4 长度小于等于 4 的回路数；

(5) D 中长度为 4 的通路(不含回路)数；

(6) D 中长度小于等于 4 的通路数，其中有几条是回路？

解　要回答以上诸问题，必先求出 D 的邻接矩阵 A，及它的前 4 次幂，以及 B_2, B_3, B_4.

A 已在前面给出，不难计算：

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$B_3=\begin{bmatrix}0&2&4&4\\0&0&2&2\\0&0&2&4\\0&0&4&6\end{bmatrix},\qquad B_4=\begin{bmatrix}0&2&7&8\\0&0&3&4\\0&0&4&7\\0&0&7&11\end{bmatrix}$$

不难算出：

(1) 分别为 1 条和 2 条；

(2) 4 条；

(3) 5 条；

(4) 11 条；

(5) 16 条；

(6) 53 条，其中有 15 条为回路.

定义 10.5 设 n 阶有向图 D 中，$V(D)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$.

$$p_{ij}=\begin{cases}1, & v_i \text{ 可达 } v_j,\\ 0, & \text{否则},\end{cases}$$

则称$[p_{ij}]_{n\times n}$为 D 的**可达矩阵**，记作 $P(D)$，简记为 P.

可达矩阵有下列性质.

(1) 由于$\forall v_i\in V(D)$，v_i 可达 v_i，所以 P 的主对角元素全为 1.

(2) 若 D 是强连通的，则 P 的全体元素均为 1.

(3) 设 D 是具有 $k(k\geqslant 2)$个连通分支 $D_1,D_2,\cdots,D_k$ 的有向图，$D_i=D[\{v_{i_1},v_{i_2},\cdots,v_{i_{n_i}}\}]$，$i=1,2,\cdots,k$，则

$$P(D)=\begin{bmatrix}P(D_1)&&&\\&P(D_2)&&\\&&\ddots&\\&&&P(D_k)\end{bmatrix},$$

其中 $P(D_i)$是 D_i 的可达矩阵.

$\forall v_i,v_j\in V(D)$且 $v_i\neq v_j$，由定理 7.6 不难得出如下结论：

$$p_{ij}=1 \text{ 当且仅当 } b_{ij}^{(n-1)}\neq 0.$$

于是由 D 的邻接矩阵可求 D 的可达矩阵.

在图 10.5 所示有向图中，由 B_3 可知

$$P=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}.$$

定义 10.6 设 n 阶无向简单图 G 中，$V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，令 $a_{ii}^{(1)}=0$，$i=1,2,\cdots,n$，

$$a_{ij}^{(1)}=\begin{cases}1, & v_i \text{ 与 } v_j \text{ 相邻}, i\neq j,\\ 0, & \text{否则},\end{cases}$$

称 $[a_{ij}^{(1)}]_{n\times n}$ 为 G 的**相邻矩阵**，记作 $A(G)$，简记为 A. 图 10.6 所示无向简单图的相邻矩阵为

$$A(G)=\begin{array}{c}\\ v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}v_1&v_2&v_3&v_4\end{array}\\ \begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&0&0\\1&1&0&0\end{bmatrix}\end{array}$$

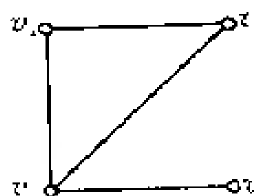


图 10.6

不难看出相邻矩阵有如下性质：

(1) A 是对称的；

(2) $\sum_j a_{ij}^{(1)}=d(v_i)$；

(3) $\sum_i\sum_j a_{ij}^{(1)}=\sum_i d(v_i)=2m$，其中 m 为边数，也为 G 中长度为 1 的通路数.

设 $A^k=A^{k-1}\cdot A=[a_{ij}^{(k)}]_{n\times n}$，$k=2,3,\cdots$，有下面定理.

定理 10.5 设 G 是 n 阶无向简单图，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，A 是 G 的相邻矩阵，A^k 中元素 $a_{ij}^{(k)}$ ($=a_{ji}^{(k)}$) ($i\neq j$) 为 G 中 v_i 到 v_j(v_j 到 v_i) 长度为 k 的通路数. 而 $a_{ii}^{(k)}$ 为 v_i 到 v_i 长度为 k 的回路数.

用归纳法证明.

推论 1 在 A^2 中，$a_{ii}^{(2)}=d(v_i)$.

推论 2 若 G 是连通图，对于 $i\neq j$，v_i，v_j 之间的距离 $d(v_i,v_j)$ 为使 A^k 中元素 $a_{ij}^{(k)}\neq 0$ 的最小正整数 k.

【例 10.3】 在图 10.6 所示图中，求 v_1 到 v_2、v_1 到 v_3 长度为 4 的通路数，v_1 到 v_1 长度为 4 的回路数.

解 相邻矩阵 A 在前面已求出，下面求 A^2, A^3, A^4 即可.

$$A^2=\begin{bmatrix}2&1&1&1\\1&3&0&1\\1&0&1&1\\1&1&1&2\end{bmatrix},\quad A^3=\begin{bmatrix}2&4&1&3\\4&2&3&4\\1&3&0&1\\3&4&1&2\end{bmatrix},$$

$$A^4=\begin{bmatrix}7&6&4&6\\6&11&2&6\\4&2&3&4\\6&6&4&7\end{bmatrix}.$$

从 A^4 可以看出 v_1 到 v_2 长度为 4 的通路数为 6 条. 这 6 条通路分别为

$$v_1v_4v\,v_4v_2,\quad v_1v_4v_2v_4v_2,$$
$$v_1v_4v_2v_3v_2,\quad v_1v_2v_4v\,v_2,$$
$$v_1v_4v_2v_1v_2,\quad v_1v_2v_1v_4v_2.$$

v_1 到 v_3 长度为 4 的通路有 4 条，它们是

$$v_1v_2v_4v_2v_3,\quad v_1v_2v_1v_2v_1,$$
$$v_1v_4v\,v\,v_3,\quad v\,v_2v_1v_2v_3.$$

v_1 到 v_1 长度为 4 的回路有 7 条，它们是

$$v_1v_4v_1v_4v\,,\quad v_1v_4v_2v_4v\,,$$
$$v_1v_4v_1v_2v_1,\quad v_1v_2v_1v_2v_1,$$
$$v\,v_2v_4v_2v_1,\quad v_1v_2v_3v_2v_1,$$
$$v\,v_2v_1v_4v_1.$$

由以上结果可以看出，所求通路、回路多半是复杂的通路和复杂回路.

下面给出无向图的连通矩阵的概念.

定义 10.7 设 n 阶无向简单图 G 中，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，令

$$p_{ij}=\begin{cases}1, & v_i \text{ 与 } v_j \text{ 连通},\\ 0, & \text{否则},\end{cases}$$

称 $[p_{ij}]_{n\times n}$ 为 G 的**连通矩阵**，记作 $P(G)$，简记为 P.

不难看出 P 有如下性质.

(1) P 的主对角元素均为 1.

(2) 若 G 是连通图，则 P 中元素全为 1.

(3) 设无向图 G 有 $k(k\geq 2)$ 个连通分支 $G_1, G_2, \cdots, G_k$，且 $G_i = G[v_{i_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_{n_i}}]$，$i=1,2,\cdots,k$，则

$$P(G) = \begin{bmatrix} P(G_1) & & & \\ & P(G_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & P(G_k) \end{bmatrix},$$

其中，$P(G_i)$ 为 G_i 的连通矩阵.

由定理 7.6，也可以用 G 的相邻矩阵求 G 的连通矩阵. 为此，设

$$A + A^2 + \cdots + A^r = B_r = [b_{ij}^{(r)}]_{n\times n}, r = 1,2,\cdots$$

$i\neq j$ 时，$p_{ij}=1$ 当且仅当 $b_{ij}^{(n-1)}\neq 0$，因而由 B_{n-1} 中元素是否为 0 就可以求出 $p_{ij}(i\neq j)$.

图 10.7 所示无向图的连通矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

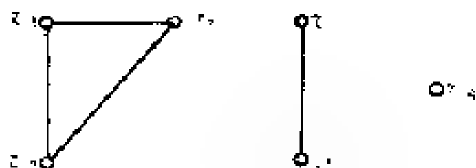
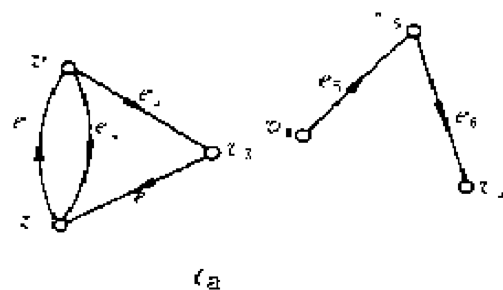


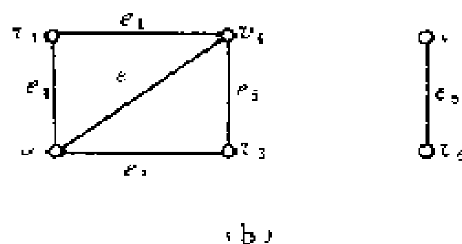
图 10.7

习 题 十

1. 求图 10.8 所示[illegible]图的关联矩阵.



(a)



(b)

图 10.8

2. 利用基本关联矩阵法求图 10.9 所示图中的所有生成树.

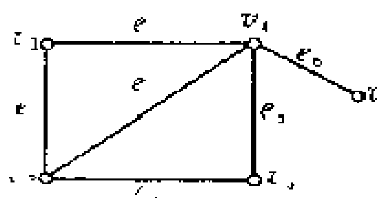


图 10.9

3. 求标定的完全图 K_4 中的所有生成树.

4. 有向图如图 10.10 所示.

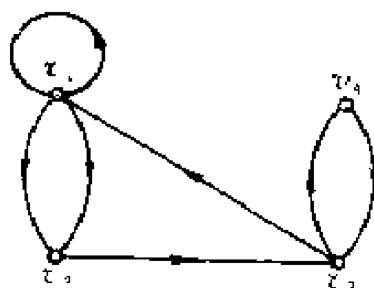


图 10.10

(1) D 中 v_1 到 v_4 长度为 1,2,3,4 的通路各为多少条?

(2) v_1 到 v_4 长度小于等于 3 的通路为多少条?

(3) v_1 到 v_1 长度为 1,2,3,4 的回路各为多少条?

(4) v_4 到 v_4 长度小于等于 3 的回路为多少条?

(5) D 中长度为 4 的通路(不含回路)有多少条?

(6) D 中长度为 4 的回路有多少条?

(7) D 中长度小于等于 4 的通路为多少条? 其中有多少条为回路?

(8) 写出 D 的可达矩阵.

5. 已知标定的无向图如图 10.11 所示 A 是它的相邻矩阵,求 A^k 中的元素 $a_{22}^{(k)}$, $k=1,2,\cdots$.



图 10.11

第十一章　平　面　图

本章讨论的图均为无向图.

§ 11.1　平面图的基本概念

定义 11.1　如果图 G 能以这样的方式画在曲面 S 上，即除顶点处外无边相交，则称 G 可嵌入曲面 S. 若 G 可嵌入平面 Π，则称 G 是**可平面图**或**平面图**. 画出的没有边相交的图称为 G 的**平图表示**或**平面嵌入**. 无平面嵌入的图称为**非平面图**.

下文中所谈平面图，有时是指平面嵌入，有时则不是，要根据具体情况加以区分.

K_1, K_2, K_3, K_5-e（K_5 删除任意一条边）都是平面图，而 K_5，$K_{3,3}$ 都是非平面图，根据平面图的定义证明 $K_5, K_{3,3}$ 不是平面图，要用约当（Jordan）定理.

自身不相交的，始点和终点重合的曲线称为**约当曲线**.

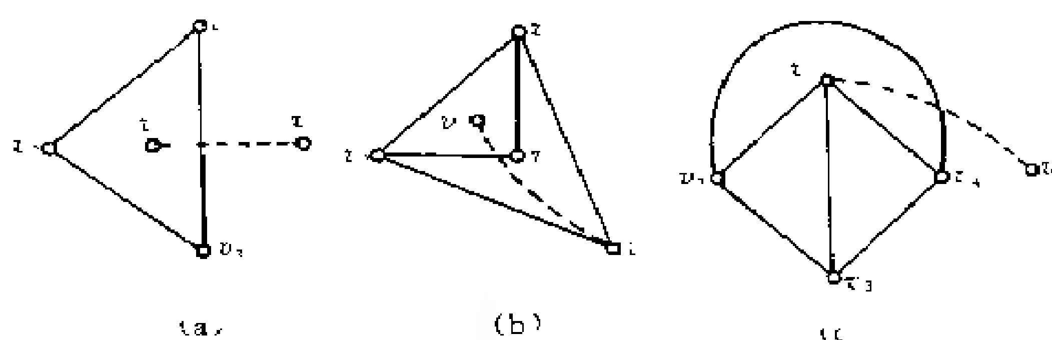
约当定理　设 L 是平面 Π 上的一条约当曲线，平面的其余部分被分成了两个不相交的开集，分别称为 L 的内部和外部，则连接 L 的内部点和外部点的任何连续曲线必与 L 相交.

【例 11.1】　用约当定理证明 K_5 不是平面图.

证明　设 K_5 的顶点集 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_5\}$. 若 K_5 是平面图，则必存在平面嵌入，设为 $\tilde{K}_5$. 在 $\tilde{K}_5$ 中，回路 $C_1=v_1v_2v_3v_1$ 为平面上的一条约当曲线. v_4, v_5 必在 C_1 的内部或外部，可分三种情况讨论：

(1)　一个在 C_1 的内部，另一个在 C_1 的外部，不妨设 v_4 在 C_1 的内部，v_5 在 C_1 的外部，见图 11.1(a)所示. 由约当定理可知，作

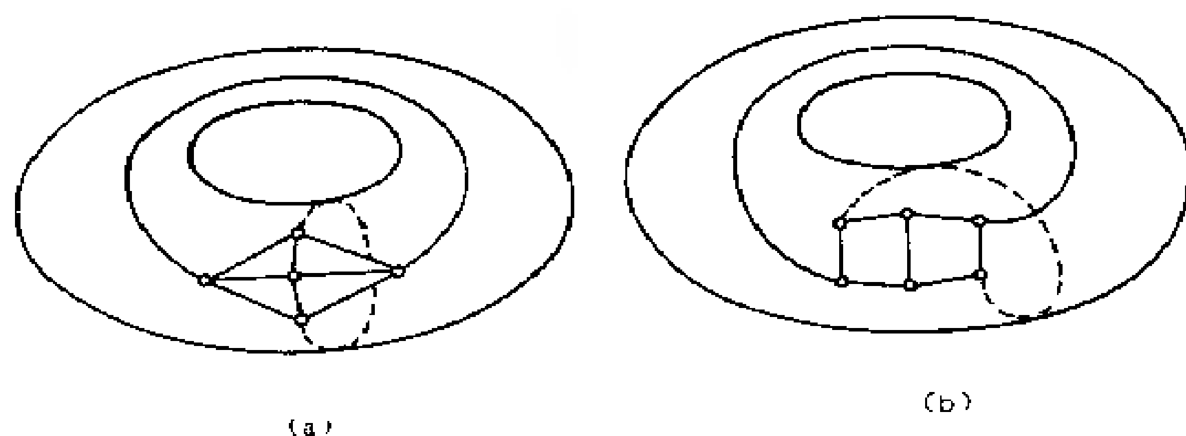
为连续曲线边(v_4,v_5)必与C_1相交，而交点不是v_1,v_2,v_3，这与$\tilde{K}_5$是平面嵌入矛盾.



(a)　　(b)　　(c)

图 11.1

(2) v_4,v_5均在C_1的内部. 由于v_5必与v_1,v_2,v_3均相邻，因而v_4必在$C_2=v_2v_3v_5v_2$，$C_3=v_3v_1v_5v_3$，$C_5=v_5v_1v_2v_5$中的一个的内部，不妨设v_4在C_5中，见图 11.1(b)所示. 此时v_3在C_5的外部. 由约当定理可知，边(v_4,v_3)必与C_5相交，这矛盾于$\tilde{K}_5$是平面嵌入.



(a)　　(b)

图 11.2

(3) v_4,v_5均在C_1的外部. 由于v_4必与v_1,v_2,v_3均相邻，v_1在$C_4=v_4v_2v_3v_1$的内部，而v_5在C_4的外部，用约当定理又会推出矛盾.

综上所述，K_5不是平面图，类似可证$K_{3,3}$也不是平面图.

K_5，$K_{3,3}$是两个极其重要的非平面图，在平面图的判断上起着极其重要的作用，常被称为库拉图斯基(Kuratowski)的两个图．K_5，$K_{3,3}$虽然不能嵌入平面，但它们却可以嵌入环面，图 11.2 中，(a)，(b)分别是 K_5 和 $K_{3,3}$的环面嵌入．但它们都不能嵌入球面，见下面定理．

定理 11.1 图 G 可嵌入球面当且仅当 G 可嵌入平面．

证明 设球面 S 与平面 Π 的切点为 s，称 s 为南极，设过 s 与 S 所对应的球的球心 O 的直线与 S 的另一个交点为 n，称为 S 的北极．设

$$\rho: S - \{n\} \to \Pi,$$

$\forall x \in S(x \neq n)$，$\rho(x) = x'$，其中 x' 是过北极 n 与 x 的直线与 Π 的交点．称 ρ 为 S 与 Π 之间的球极平面投影变换(见图 11.3)．易知 ρ 是双射函数．

设图 G 的球面 S 的嵌入为 $\tilde{G}$，取 S 上的一点 n(n 不在 $\tilde{G}$ 上)作为 S 的北极，南极 s 自然可得．

设 $\rho(\tilde{G}) = \tilde{G}'$，则 $\tilde{G}'$ 是 G 的平面 Π 上的嵌入，即 G 的平面嵌入．

由于 ρ 是 $S - \{n\}$，Π 之间的双射函数，给出 G 的平面嵌入 $\tilde{G}_1'$，则 $\rho^{-1}(\tilde{G}_1')$ 为 G 的球面嵌入．▌

推论 设 $\tilde{G}$ 与 $\tilde{G}'$ 分别是平面图 G 的球面嵌入与平面嵌入，则 $\tilde{G} \cong \tilde{G}'$．

证明 因为 $\tilde{G} \cong G$ 且 $\tilde{G}' \cong G$，所以 $\tilde{G} \cong \tilde{G}'$．▌

定义 11.2 设 G 是平面图(平面嵌入)，由 G 的边将 G 所在的平面划分成若干个区域，每个区域都称为 G 的一个**面**，其中面积无限的面称为**无限面或外部面**，常记成 R_0，面积有限的面称为**有限面**或**内部面**，常分别记为 $R_1, R_2, \cdots, R_k$．包围每个面的所有边组成的回路组称为该面的**边界**，边界的长度称为该面的**次数**，面 R 的次数常记为 $\deg(R)$．

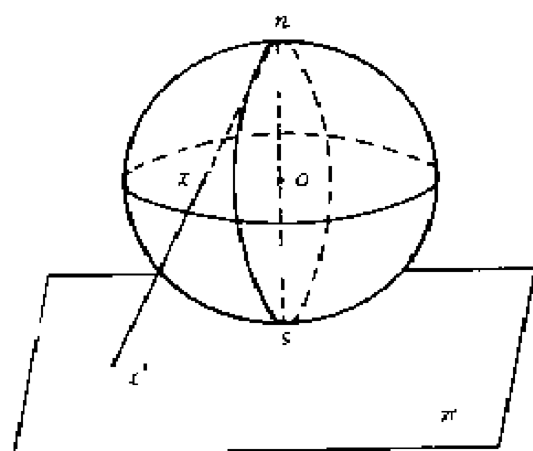


图 11.3

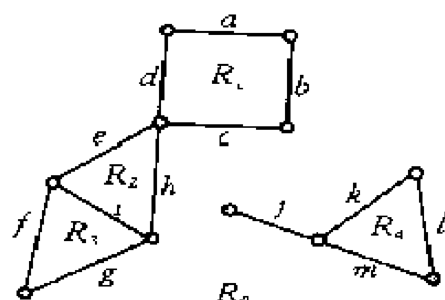


图 11.4

定义中回路组中元素可能是圈，可能是简单回路，还可能是复杂回路，或它们的并. 图 11.4 所示平面图有 5 个面，R_1, R_2, R_3, R_4 的边界均为圈，$\deg(R_1)=4$，$\deg(R_2)=3$，$\deg(R_3)=3$，$\deg(R_4)=3$. 而 R_0 的边界由一个长为 8 的简单回路，一个长为 3 的圈并上一个长为 2 的复杂回路组成，$\deg(R_0)=13$.

定理 11.2 平面图 G 中所有面的次数之和等于边数 m 的 2 倍：

$$\sum_{i=1}^{r}\deg(R_i)=2m.$$

其中 r 为 G 的面数.

证明 $\forall e\in E(G)$，当 e 为面 R_i 和 R_j $(i\neq j)$ 的公共边界上的边时，在计算 R_i 和 R_j 的次数时各提供次数 1，而当 e 只在某一个面 R_i 的边界上出现时，它必出现两次，所以在计算 R_i 的次数时 e 提供的次数为 2，于是每条边在 $\sum_{i=1}^{r}\deg(R_i)$ 中，各提供次数 2，因而 $\sum_{i=1}^{r}\deg(R_i)=2m$. ∎

定理 11.3 设 R 是平面图 G 的某个平面嵌入 $\tilde{G}$ 的一个内部面，则存在 G 的平面嵌入 $\tilde{G}'$ 以 R 为外部面.

证明 先将 $\tilde{G}$ 嵌入球面 S，滚动 S 使其 R 对应的面中含北极

n，用球极平面投影变换将 $\widetilde{G}$ 投影到平面上，设所得图为 $\widetilde{G}_1$，由定理 11.1 知，$\widetilde{G}_1$ 是 G 的平面嵌入，并且 R 已为外部面. ▌

定义 11.3 设 G 为简单平面图，若在 G 的任意不相邻的顶点 u,v 之间加边 (u,v)，所得图为非平面图，则称 G 为**极大平面图**.

K_1、K_2，K_3，K_5-e（表示 K_5 删除任意一条边）均为极大平面图. 从定义不难看出，极大平面图必是连通的. 另外，当阶数 $n\geqslant 3$ 时，有割点或桥的平面图不可能是极大平面图. 而极大平面的最大特点应由下面定理所提供.

定理 11.4 G 为 $n(n\geqslant 3)$ 阶简单的连通平面图，G 为极大平面图当且仅当 G 的每个面的次数均为 3.

证明

必要性.

因为 G 为简单平面图，所以 G 中无环和平行边，又因为 G 是至少 3 个顶点的极大平面图，所以 G 连通且无割点和桥，于是 G 中各面的边界均为圈且次数均大于等于 3. 下面只需证明各面的次数不会大于 3. 否则，设存在面 R_i，$\deg(R_i)=S\geqslant 4$，见图 11.5 所示. 在 G（平面嵌入）中，若 v_1 与 v_3 不相邻，在 R_i 内加边 (v_1,v_3) 不破坏平面性，这矛盾于 G 为极大平面图，因而 v_1，v_3 必相邻，由于 R_i 的存在，此时 (v_1,v_3) 在 R_i 的外部. 类似地，v_2，v_4 也必相邻，且边 (v_2,v_4) 也在 R_i 的外部，边 (v_1,v_3) 与 (v_2,v_4) 均在 R_i 的外面，无论用怎样的画法，它们必相交，这又矛盾于 G 是平面图（嵌入），所以 $S=3$.

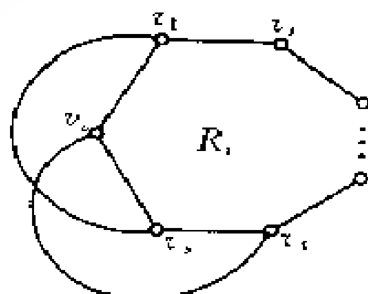


图 11.5

充分性.

若G中不存在不相邻的顶点,结论显然成立.若G中存在不相邻的顶点,只需证明G中任何二不相邻顶点之间再加边均会产生边之间的相交即可.设u,v为G中二不相邻的顶点,则u,v不可能都在外部面R_0的边界是上(因为R_0的边界也为K_3).因而至少有一个顶点,比如v不在R_0的边界上,见图11.6所示.则与v关联的各边也不在C_0(R_0的边界)上.设$G'=G-v$,G'中存在原来含v的圈C,因为u与v不相邻,所以u不在C上.由约当定理可知,若加边(u,v),则它必与C相交,所以G是极大平面图. ▮

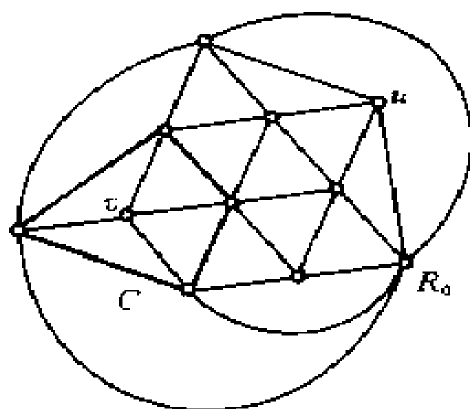


图 11.6

定理11.4的充分性还可以用下节的定理证明.

定理11.5 $n(n\geqslant 4)$阶极大平面图G中,$\delta(G)\geqslant 3$.

证明 由定理11.4可知,G的围长$g(G)=3$,且与任意顶点v相邻的顶点均在某圈C上,由于$g(G)=3$,所以C的长度大于等于3,而$d(v)$等于C的长度,所以$d(v)\geqslant 3$,由于v的任意性,可知$\delta(G)\geqslant 3$. ▮

设G是n阶简单平面图,用添加边的方法(顶点不增加)总可以得到含G作为子图的n阶极大平面图.

定义11.4 若在非平面G中任意删除一条边,所得图为平面图,则称G为**极小非平面图**.

K_5 和 $K_{3,3}$ 都是极小非平面图.

在本节结束之前还应该指出，若一个图 G 是平面图，则它的任何子图也是平面图，若 G 是非平面图，则它的母图（若存在）也是非平面图.

§11.2 欧拉公式

欧拉(Euler)在研究多面体时发现，多面体的顶点数 V，棱数 E 和面数 F 之间满足

$$V - E + F = 2.$$

后来发现，连通平面图 G 的阶数 n、边数 m、面数 r 也有类似的公式.

定理 11.6 对于任意的连通的平面图 G，有

$$n - m + r = 2,$$

其中，n, m, r 分别为 G 的阶数、边数和面数.

证明 对边数 m 作归纳法.

(1) $m = 0$ 时，由于 G 是连通图，所以 G 为平凡图，公式自然成立.

(2) 设当 $m = k (k \geqslant 1)$ 时结论成立，当 $m = k + 1$ 时，对 G 进行如下讨论.

若 G 是树，则 G 是非平凡树，因而存在树叶，设 v 为 G 的一片树叶，令 $G' = G - v$，则 G' 仍然是连通图，则 G' 的边数 $m' = m - 1 = k$，由归纳假设可知

$$n' - m' + r' = 2,$$

其中 n', r' 分别为 G' 的顶点数和面数. 而 $n' = n - 1, r' = r$，于是

$$n - m + r = (n' + 1) - (m' + 1) + r' = n' - m' + r' = 2.$$

若 G 不是树，则 G 中必含圈，设 e 为 G 的某圈上的一条边，令 $G' = G - e$，则 G' 仍然是连通的. 且 $m' = m - 1 = k$，由归纳假设知

$$n' - m' + r' = 2,$$

而 $n'=n, r'=r-1$，于是，

$$n-m+r=n'-(m'+1)+(r'+1)$$
$$=n'-m'+r'=2. \quad \blacksquare$$

定理 11.6 称为**欧拉公式**. 定理的条件“连通性”是不可少的. 对于非连通的平面图有下面定理.

定理 11.7 对于任何具有 $p(p\geqslant 2)$ 个连通分支的平面图 G，有

$$n-m+r=p+1$$

成立，其中 n,m,r 分别为 G 的顶点数、边数和面数.

证明 设 G 的连通分支为 $G_1,G_2,\cdots,G_p$，并设 n_i,m_i,r_i 为 G_i 的顶点数、边数和面数，$i=1,2,\cdots,p$. 由欧拉公式可得

$$n_i-m_i+r_i=2,\quad i=1,2,\cdots,p,$$

而

$$m=\sum_{i=1}^{p}m_i,\quad n=\sum_{i=1}^{p}n_i,\quad r=\sum_{i=1}^{p}r_i-p+1,$$

于是

$$2p=\sum_{i=1}^{p}(n_i-m_i+r_i)$$
$$=\sum_{i=1}^{p}n_i-\sum_{i=1}^{p}m_i+\sum_{i=1}^{p}r_i$$
$$=n-m+r+p-1$$
$$\Rightarrow n-m+r=p+1.$$

定理 11.7 称为欧拉公式的推广形式.

应用欧拉公式及其推广形式可以得到平面图的另外一些性质.

定理 11.8 设 G 是连通的平面图，且 G 的各面的次数至少为 $l(l\geqslant 3)$，则 G 的边数 m 与顶点数 n 有如下关系：

$$m\leqslant \frac{l}{l-2}(n-2).$$

证明 由定理 11.2 可知

$$2m = \sum_{i=1}^{r} \deg(R_i) \geq l \cdot r, \tag{1}$$

由欧拉公式知

$$r = 2 + m - n, \tag{2}$$

将(2)式代入(1)式，得

$$2m \geq l(2 + m - n)$$

$$\Rightarrow m \leq \frac{l}{l-2}(n-2). \quad \blacksquare$$

【例 11.2】 利用定理 11.8 证明 K_5 和 $K_{3,3}$ 都不是平面图.

证明 (1) 证 K_5 不是平面图. 若 K_5 是平面图，由于 K_5 的围长 $g(K_5) = 3$，所以 K_5 的平面嵌入的每个面的次数至少为 3，即 $l \geq 3$. 由定理 11.8 知

$$10 \leq \frac{3}{3-2}(5-2) = 9,$$

这是个矛盾，所以 K_5 不是平面图.

(2) 证 $K_{3,3}$ 不是平面图. 由于 $g(K_{3,3}) = 4$，若 $K_{3,3}$ 是平面图，则它的平面嵌入的每个面的次数至少为 4，即 $l \geq 4$. 于是

$$9 \leq \frac{4}{4-2}(6-2) = 8,$$

这又是个矛盾，所以，$K_{3,3}$ 也不是平面图.

至此，可以用两种方面证明 K_5，$K_{3,3}$ 都不是平面图.

定理 11.9 设 G 是有 $p(p \geq 2)$ 个连通分支的平面图，各面的次数至少为 $l(l \geq 3)$，则边数 m 与顶点数 n 有如下关系：

$$m \leq \frac{l}{l-2}(n - p - 1).$$

用定理 11.7 证定理 11.9.

定理 11.10 设 G 是 $n(n \geq 3)$ 阶 m 条边的简单平面图，则

$$m \leq 3n - 6.$$

证明 设 G 有 p 个连通分支，$p \geq 1$.

若 G 为森林，则 $m = n - p < 3n - 6 (n \geq 3)$.

若 G 不是森林，则 G 中存在圈，由于 G 是简单图，所以圈的长度大于等于3，因而各面的次数至少为 $l(l\geqslant 3)$，$\frac{l}{l-2}=1+\frac{2}{l-2}$ 在 $l=3$ 时达到最大值3，由定理 11.9 得

$$m \leqslant \frac{l}{l-2}(n-p-1) \leqslant 3(n-p-1)$$
$$\leqslant 3(n-2)=3n-6. \quad \blacksquare$$

定理 11.11 设 G 为 n 阶 $(n\geqslant 3)$ m 条边的极大平面图，则

$$m=3n-6.$$

证明 由于 G 是连通的，由欧拉公式得

$$r=2+m-n. \tag{1}$$

又因为 G 是极大平面图，由定理 11.4 知，G 的每个面的次数均为3，所以

$$2m=\sum_{i=1}^{r}\deg(R_i)=3\cdot r. \tag{2}$$

将式(1)代入式(2)中，整理后得

$$m=3n-6. \quad \blacksquare$$

注意定理 11.11 中的 $m=3n-6$ 是极大平面($n\geqslant 3$ 时)的必要条件，而不是充分条件.

定理 11.12 设 G 是简单的平面图，则 G 中至少存在一个顶点，其度数小于等于5.

证明 若 G 的顶点数 $n\leqslant 6$，结论是显然的. 因而仅就 $n\geqslant 7$ 讨论. 若 G 中所有顶点的度数均大于等于6，则由握手定理知

$$2m=\sum_{i=1}^{n}d(v_i)\geqslant 6n \Rightarrow m\geqslant 3n,$$

这与定理 11.10 矛盾. $\blacksquare$

由本定理可知，完全图 $K_n(n\geqslant 7)$ 一定是非平面图，实际上，K_5，K_6 已经都是非平面图了.

定理 11.12 在图的着色理论中居重要地位.

§11.3 平面图的判断

1930年，波兰数学家库拉图斯基发表论文给出了平面图的判别法，即库拉图斯基定理. 定理有两种在拟阵理论意义下的对偶形式. 与定理有关的概念是同胚与边收缩的概念. 关于边收缩的概念已在第七章中讨论过了.

定义 11.5 设 $e=(u,v)$ 为图 G 中一条边，在 G 中删除 e，增加新的顶点 w，使 u 与 v 均与 w 相邻，即 $G'=(G-e)\cup\{(u,w),(w,v)\}$，称为在 G 中插入 2 度顶点 w. 设 w 为 G 中一个 2 度顶点，w 与 u,v 相邻，删除 w，增加新边 (u,v)，即 $G'=(G-w)\cup\{(u,v)\}$，称为在 G 中消去 2 度顶点 w.

定义 11.6 若两个图 G_1 与 G_2 是同构的，或通过反复插入或消去 2 度顶点后是同构的，则称 G_1 与 G_2 是**同胚**的. 图 11.7 中(a)，(b)两图是同胚的.

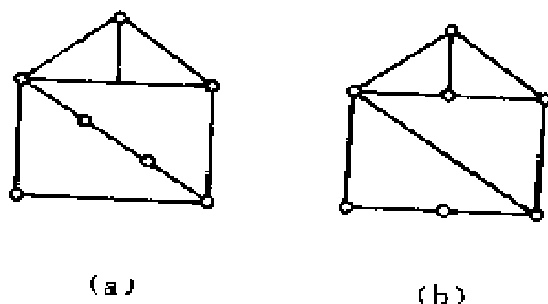


图 11.7

定理 11.13 图 G 是平面图当且仅当 G 不含与 K_5 同胚子图，也不含与 $K_{3,3}$ 同胚子图.

定理 11.14 图 G 是平面图当且仅当 G 中没有可以收缩到 K_5 的子图，也没有可以收缩到 $K_{3,3}$ 的子图.

以上两个定理的证明可在参考书目[5]中查到，这两个定理称为库拉图斯基定理.

【例 11.3】 证明图 11.8 中所示的(a)，(b)，(c)图均不是平

面图.

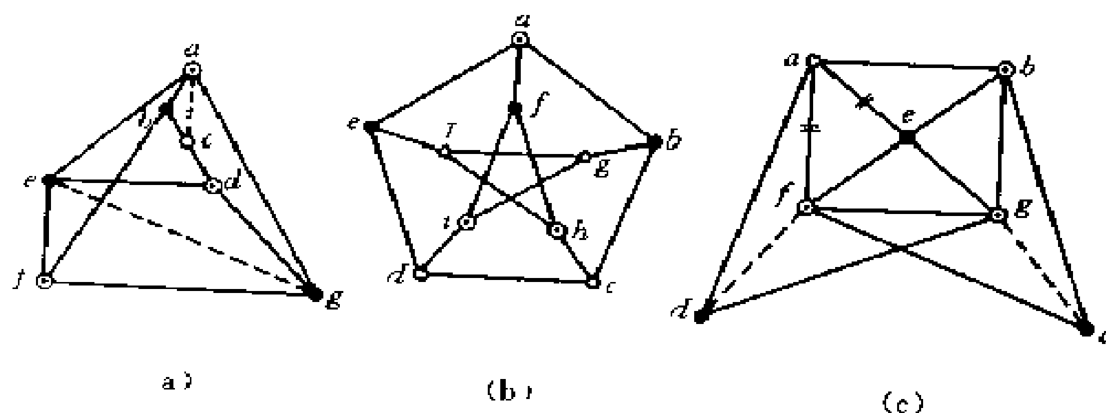


图 11.8

证明 (1) 对(a)进行讨论.

收缩边(c,d),使c与d重合,再收缩边(b,f),使b与g重合,得K_5,由定理11.14可知,(a)不是平面图.

还可以如下证明.设$G'=G-\{(a,c),(e,g)\}$,G'作为(a)的子图与$K_{3,3}$同胚,由定理11.13可知(a)不是平面图.

(2) 对(b)进行讨论.

在(b)中,收缩边(a,f),(b,g),(c,h),(d,i),(e,j),所得图为K_5,由定理11.14可知,(b)不是平面图.

还可以这样考虑.令$G'=G-\{(j,g),(d,c)\}$,则G'与$K_{3,3}$同胚,由定理11.13可知(b)不是平面图.其实,(b)图为彼得森图,这说明彼得森图不是平面图.

(3) 对(c)进行讨论.

令$G'=G-\{(d,f),(g,c)\}$,易知G'与K_5同胚.由定理11.13可知,(c)不是平面图.

另外,令$G''=G-\{(a,e),(a,f),(b,g),(g,f)\}$,则$G''$与$K_{3,3}$同胚,所以,(C)不是平面图.

【例11.4】 K_6有哪些非同构的连通的含$K_{3,3}$为子图的生成子图是非平面图?

解 已知 $K_{3,3}$ 是 K_6 的子图，并且是极小非平面图. 根据库拉图斯基定理，在 K_6 中，对子图 $K_{3,3}$ 增加 1，2，3，4，5，6 条边的所有非同构的子图都是生成子图并且是非平面图. 共有 10 个图，见图 11.9 所示.

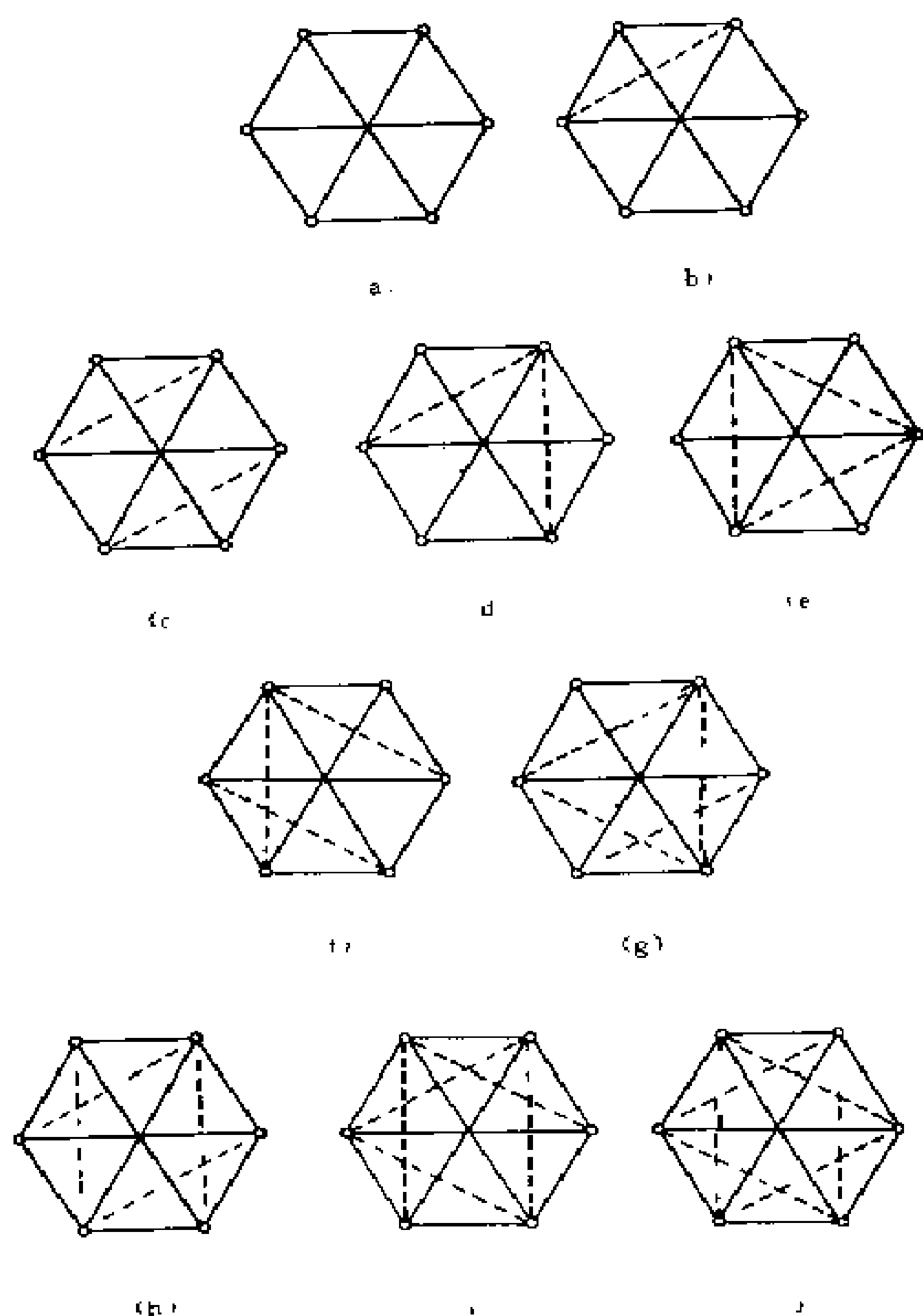


图 11.9

§ 11.4 平面图的对偶图

本节讨论的是平面图的几何对偶图.

定义 11.7 设 G 是平面图的某一个平面嵌入. 构造图 G^* 如下:

(1) 在 G 的每个面 R_i 中放置 G^* 的一个顶点 v_i^*.

(2) 设 e 为 G 的一条边，若 e 在 G 的面 R_i 和 R_j 的公共边界上，做 G^* 的边 e^* 与 e 相交，且 e^* 关联 G^* 的顶点 v_i^*，v_j^*，即 $e^*=(v_i^*, v_j^*)$，e^* 不与其它任何边相交. 若 e 为 G 中桥且在 R_i 的边界上，则 e^* 是以 R_i 中顶点 v_i^* 为端点的环，即 $e^*=(v_i^*, v_i^*)$.

称 G^* 为 G 的**对偶图**.

从定义不难看出以下几点.

(1) G^* 为平面图，而且是平面嵌入.

(2) 若边 e 为 G 中的环，则它对应的边 e^* 为 G^* 的桥，若 e 为 G 中的桥，则 e^* 为 G^* 中的环.

(3) G^* 是连通的.

(4) 若 G 的面 R_i 与 R_j 的边界上至少有两条公共边，则关联 v_i^* 与 v_j^* 的边有平行边，G^* 多半是多重图.

(5) 同构的图的对偶图不一定是同构的.

图 11.10 中(a)，(b)所示的图 $G_1 \cong G_2$，但它们的对偶图(虚线边所示的图) $G_1^* \not\cong G_2^*$，这就是几何对偶图的特点.

定理 11.15 设 G^* 是连通平面图 G 的对偶图，n^*，m^*，r^* 和 n，m，r 分别为 G^* 和 G 的顶点数、边数和面数，则

(1) $n^*=r$;

(2) $m^*=m$;

(3) $r^*=n$;

(4) 设 G^* 的顶点 v_i^* 位于 G 的面 R_i 中，则

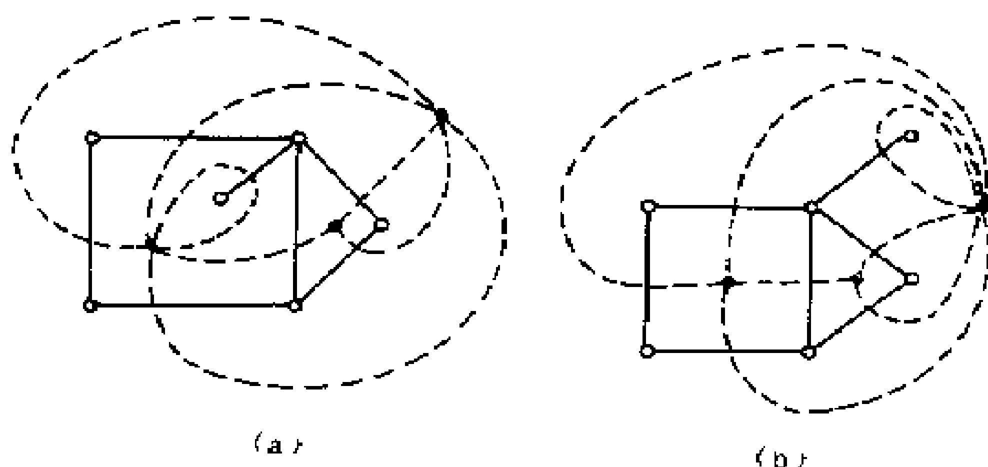


图 11.10

$$d_{G^*}(v_i^*) = \deg(R_i).$$

证明 (1),(2)的成立是显然的.

(3) 由于 G 与 G^* 都是连通的平面图,因而都满足欧拉公式:

$$n - m + r = 2, \tag{1}$$

$$n^* - m^* + r^* = 2, \tag{2}$$

于是,由(1),(2)可推出

$$r^* = 2 + m^* - n^* = 2 + m - r = n.$$

(4) 设 C_i 为 R_i 的边界,C_i 中有 $k_1(k_1 \geqslant 0)$ 条桥,k_2 条非桥(即 k_2 条边在 R_i 与另外面的公共边界上),于是 C_i 的长度为 $k_2 + 2k_1$,即

$$\deg(R_i) = k_2 + 2k_1.$$

而 k_1 条桥对应 v_i^* 处有 k_1 个环,k_2 条非桥对应从 v_i^* 处引出 k_2 条边,于是

$$d_{G^*}(v_i^*) = k_2 + 2k_1.$$

故结论为真. ∎

定理 11.16 设 G^* 是具有 $p(p \geqslant 2)$ 个连通分支的平面图的对偶图,则

(1) $n^* = r$;

(2) $m^* = m$;

(3) $r^* = n - p + 1$;

(4) 设 v_i^* 位于 G 的面 R_i 中，则

$$d_{G^*}(v_i^*) = \deg R_i).$$

其中 n^*, m^*, r^*, n, m, r 同定理 11.15.

证明 只有(3)的证明与定理 11.15 不同. 由欧拉公式的推广得

$$n - m + r = p + 1, \tag{1}$$

由欧拉公式得

$$n^* - m^* + r^* = 2, \tag{2}$$

由(1),(2)可解出：

$$r^* = n - p + 1.$$

定理 11.17 设 G^* 是某平面图 G 的对偶图，在 G^* 的图形不改变的条件下，$G^{**} \cong G$ 当且仅当 G 是连通图.

证明 必要性显然，下面证明充分性.

因为 G 连通，由定理 11.15 可知，$r^* = n$，这说明 G^* 中每个面恰含 G 的一个顶点，由 G^* 产生它的对偶图 G^{**} 时，取 R_i^* 中 G 的顶点 v_i 作为 G^{**} 的顶点 v_i^{**}，G^{**} 的边就取 G 中边，因而 $G^{**} \cong G$. ▌

由于同构图的对偶图不一定同构，所以定理 11.7 要求 G^* 的位置及形状不改变，否则会出现 $G^{**} \not\cong G$ 的情况.

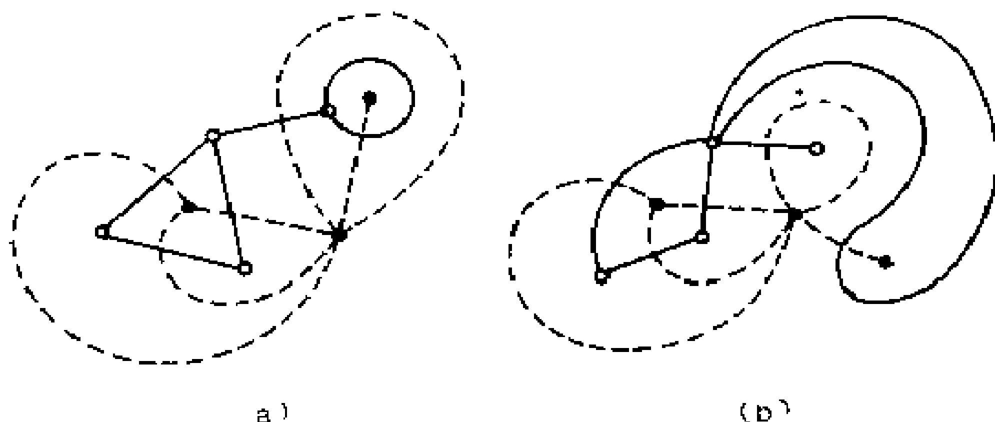


图 11.11

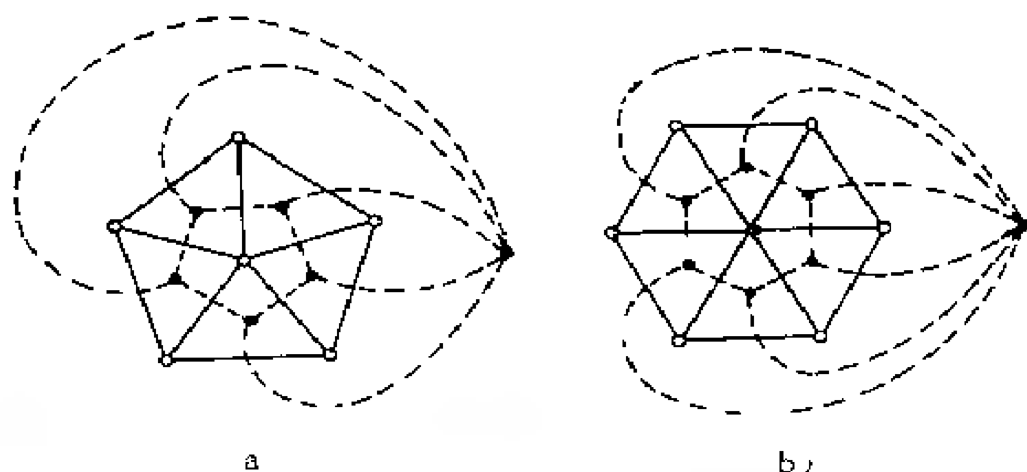
图 11.11(a)中实线边所示图为平面图 G,虚线边所示的图为它的对偶图 G^*.(b)中虚线边所示的图 $G_1^* \cong G^*$,但桥从环中拿出,G_1^* 的对偶图 G_1^{**},为(b)中实边所示的图,$G_1^{**} \ncong G$.

定义 11.8 设 G^* 是平面图 G 的对偶图,若 $G^* \cong G$,则称 G 是**自对偶图**.

自对偶图显然都是连通图.

定义 11.9 在 $n-1(n \geq 4)$ 边形 C_{n-1} 内放置一个顶点,使其与 C_{n-1} 上 $n-1$ 个顶点均相邻,所得简单图称为**轮图**,记作 W_n,当 n 为奇数时,称 W_n 为**奇阶轮图**,当 n 为偶数时,称 W_n 为**偶阶轮图**.另放置的顶点称为**轮心**.

图 11.12 中,(a)为 W_6,它为偶阶轮图,(b)为 W_7,它是奇阶轮图.



(a) (b)

图 11.12

轮图显然都是连通的平面图. W_n 有 n 个面.设为 $R_1, R_2, \cdots, R_{n-1}, R_0$, $\deg(R_1)=\deg(R_2)=\cdots=\deg(R_{n-1})=3$,而 $\deg(R_0)=n-1$.

图中虚线边所示的图分别为 W_6, W_7 的对偶图 W_6^*, W_7^*,显见 $W_6^* \cong W_6$, $W_7^* \cong W_7$.

一般情况下,轮图 W_n 的对偶图 W_n^* 与 W_n 同构是显然的,它们都是由长为 $n-1$ 的圈与一个特定顶点(轮心)组成的图,图中特

定顶点与圈上的各顶点均相邻，只是特定顶点的位置不同而已，于是有下面定理.

定理 11.18 $n(n\geq 4)$阶轮图 W_n 是自对偶图.

§11.5 外平面图

定义 11.10 设 G 是一个平面图，若 G 存在平面嵌入 $\tilde{G}$，使得 G 中所有顶点都在 $\tilde{G}$ 的一个面的边界上，则称 G 为**外可平面图**，简称**外平面图**.

由定理 11.3 可知，外平面图存在所有顶点都在外部面的边界上的平面嵌入.

图 11.13 中所示的 4 个图中，(a)，(b)是外可平面图，(a)的所有顶点均在外部面边界上，而(b)的所有顶点均在某一个内部面边界上，(c)，(d)均不是外平面图.

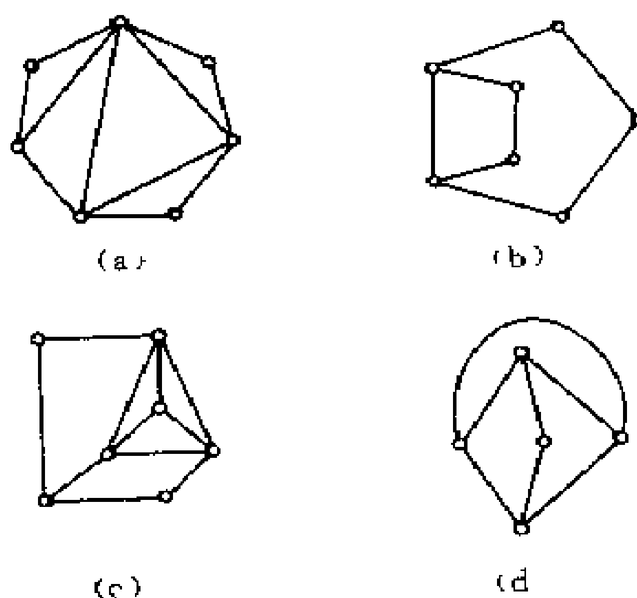


图 11.13

定义 11.11 设 G 是简单的外平面图，若对于 G 中任二不相邻的顶点 u,v，令 $G'=G\cup(u,v)$，则 G' 不是外平面图，称 G 为**极大**

外平面图.

图 11.13 中,(a)是极大外平面图,而(b)不是极大外平面图.显然外可平面图也是连通的.

定理 11.19 所有顶点都在外部面边界上的 $n(n\geq 3)$ 阶外可平面图是极大外可平面图当且仅当 G 的每个面的边界都是长为 3 的圈,外部面的边界是一个长为 n 的圈.

证明 必要性.

否则,若存在某内部面的边界不是长为 3 的圈或外部面的边界不是长为 n 的圈,都会推出矛盾来.下面分情况讨论:

(1) 设 R 为 G 的一个内部面 R,$\deg(R)=s\geq 4$.设 R 的边界为 $v_1v_2\cdots v_sv_1$,顶点 $v_1,v_2,\cdots,v_s$ 均在外部面的边界上.在 R 内加边不破坏外可平面性,这与 G 是极大外平面图矛盾.

(2) 若 G 的外部面 R_0 的边界不是圈,由 G 的连通性,R_0 的边界必为非圈的简单回路,于是存在 G 的割点 v,它连接两个以上的圈,见图 11.14 所示.在这些圈上,必存在属于不同圈的不相邻顶点 v',v'',使得 $G\cup(v',v'')$ 不破坏外可平面性,这矛盾于 G 是极大外平面图.

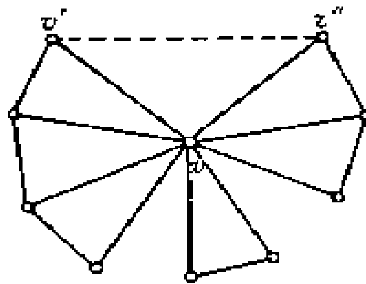


图 11.14

充分性.

若 G 只有一个内部面,则 G 为 K_3,显然 G 为极大外平面图.

设 G 至少有两个内部面,此时 G 的面数 $r\geq 3$,$\deg(R_0)\geq 4$,设 R_0 的边界为 C,则 G 中顶点 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 依次地位于 C 上.设 v_i,$v_{i+s}(s\geq 2)$ 为 G 中不相邻的顶点,若在 G 中再加边 $e=(v_i,v_{i+s})$,e

只能位于外部面 R_0 或若干个内部面中．若 e 位于内部面中，它至少位于两个内部面中，因而必产生边的相交，这矛盾于 G 为平面图．若 e 位于 R_0 内，则 $v_{i+1},v_{i+2},\cdots,v_{i+s-1}$ 或 $v_1,v_2,\cdots,v_{i-1},v_{i+s+1},v_{i+s+2},\cdots,v_n$ 变成只位于内部面边界上的顶点了，这矛盾于 G 是外可平面图，于是 G 是极大外可平面图． ▌

推论 对于 n 阶外平面图，总可以用添加新边的方法得到极大外平面图．

定理 11.20 设 G 是所有顶点均在外部面边界上的 $n(n\geqslant3)$ 阶极大外平面图，则 G 有 $n-2$ 个内部面．

证明 用归纳法证明，$n=3$ 时，G 为 K_3，结论成立．设 $n=k\geqslant4$ 时结论成立，$n=K+1$ 时，由定理 11.19 容易证明 G 中存在 2 度顶点，设 v 为 G 中 2 度顶点，令 $G'=G-v$，则 G' 的内部面仍为 K_3，外部面的边界为长度为 $k+1-1=k$ 的圈，由定理 11.19 知 G' 是 k 阶极大外平面图，由归纳假设知 G' 有 $k-2$ 个内部面，于是 G 有 $k-2+1=k-1=k+1-1-1=n-2$ 个内部面． ▌

定理 11.21 设 G 是 $n(n\geqslant3)$ 阶极大外平面图，则

(1) $m=2n-3$，其中 m 为 G 中边数；

(2) G 中至少有 3 个顶点的度数小于等于 3；

(3) G 中至少有 2 个顶点的度数为 2；

(4) G 的点连通度 $\kappa=2$．

证明 (1) 由定理 11.19 和 11.20 可知，G 有 $(n-2)$ 个次数为 3 的内部面，一个次数为 n 的外部面，由定理 11.2 知，

$$2m=\sum\deg(R_i)=3\cdot(n-2)+n=4n-6$$

$$\Rightarrow m=2n-3.$$

(2) 由定理 11.19 可知，$\forall\, v\in V(G)$，$d(V)\geqslant2$．若 G 中至多有 2 个顶点的度数 <3，则 $(n-2)$ 个顶点的度数 $\geqslant4$，于是

$$2m=\sum\deg(R_i)\geqslant4(n-2)+2\times2$$

$$\Rightarrow m\geqslant2n-2.$$

由(1)得

$$2n-3 \geqslant 2n-2.$$

这是矛盾的.

(3) 由定理 11.19 和 11.20 可知,在 G 中,长度为 n 的外部面的边界 C 包围 $n-2$ 个内部面. 含 2 度顶点的内部面的边界与 C 有两条公共边而不含 2 度顶点的内部面的边界与 C 至多有一条公共边. 若 G 中至多有一个 2 度顶点,则 C 的长度 $\leqslant 2+(n-2-1)=n-1$,这与 C 的长度为 n 是矛盾的.

(4) 若 $n=3$,则 G 为 K_3,结论成立,即 $\kappa(G)=2$. 下面就 $n\geqslant 4$ 讨论. 由定理 11.19 可知,G 中无割点,所以 $\kappa(G)\geqslant 2$.

G 中存在度数大于等于 3 的顶点,否则 G 为长为 n 的圈,这与它是极大外平面图矛盾. 不妨设 v_n 是 G 中最大度数顶点之一,则 $d(v_n)\geqslant 3$. 考虑 $G'=G-v_n$,则 G' 中存在路径 $v_1v_2\cdots v_{n-2}v_{n-1}$,则 v_n 与 $v_{i_1}=v_1, v_{i_2}, \cdots, v_{i_{d(v_n)}}(=v_{n-1})$ 相邻,则 $G'-v_{i_2}$ 为非连通图,即 $\{v_n, v_{i_2}\}$ 为 G 的点割集,所以 $\kappa(G)\leqslant 2$. 综上所述,$\kappa(G)=2$. ▌

定理 11.22 一个图 G 是外平面图当且仅当 G 中不含与 K_4 或 $K_{2,3}$ 同胚子图.

证明请参阅参考书目[6].

根据定理 11.22 立刻可知图 11.13 中(c),(d)都不是外平面图.

§11.6 平面图与哈密尔顿图

判断任意给定的图是否为哈密尔顿图是个至今还没有解决的难题. 什么样的平面图一定是哈密尔顿图,在图论发展史上也有一个认识过程. 四面体图、六面体图、十二面体图都是 3-连通的 3-正则平面图,都是哈密尔顿图,1880 年泰特(Tait)曾提出如下猜想:

"每个 3-连通的 3-正则平面图都是哈密尔顿图"

泰特想基于这个猜想去解决“四色猜想”①，可是，事过 60 多年，即 1946 年托特（Tutte）给出了一个 46 阶的反例，否定了泰特的猜想. 这个反例称为**托特图**，见图 11.15 所示.

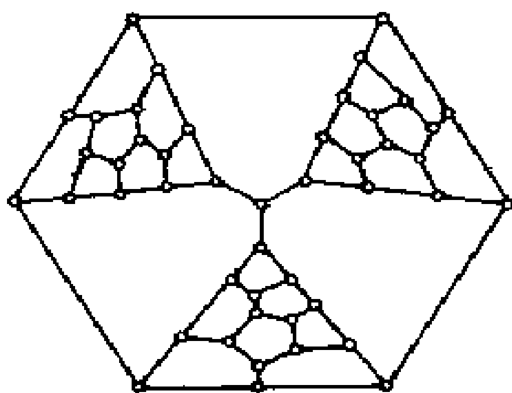


图 11.15

为了给出更小阶数的反例，格林堡（Grinberg）于 1968 年给出了一个平面图都是哈密尔顿图的一个必要条件，见下面定理.

定理 11.23 设 G 是 n 阶简单平面图且是哈密尔顿图，C 为 G 中一条哈密尔顿回路. 以 r_i'，r_i''分别表示在 C 的内部和在 C 的外部的次数为 i 的面数，则

$$\sum_{i=3}^{n}(i-2)(r_i'-r_i'')=0.$$

证明 G 中的边被分成 3 类：在 C 上的，共有 n 条；在 C 内的（称为内弦）；在 C 外的（称为外弦）. 设 m_1 为内弦数，外弦数应为 $m-(n+m_1)$，m 为总边数.

因为删除一条内弦，内部面减少 1，所以应有

$$\sum_{i=3}^{n} r_i' = m_1 + 1 \Longleftrightarrow m_1 = \sum_{i=3}^{n} r_i' - 1. \tag{1}$$

又因为每条内弦均在两个内部面的边界上，而 C 上的每条边均在一个内部面的边界上，因而内部面次数之和为

① 下一章介绍“四色猜想”.

$$\sum_{i=3}^{n} i r_i' = 2m_1 + n. \tag{2}$$

(1)代入(2)经过整理得

$$\sum_{i=3}^{n} (i-2) r_i' = n-2. \tag{3}$$

类似地有

$$\sum_{i=3}^{n} (i-2) r_i'' = n-2. \tag{4}$$

(3)(4)得

$$\sum_{i=3}^{n} (i-2)(r_i' - r_i'') = 0. \quad ∎$$

【例 11.5】 图 11.6 所示的图是平面图并且是哈密尔顿图. 证明图中不存在过边(a,b)的哈密尔顿回路. 图中数字为所在面的次数.

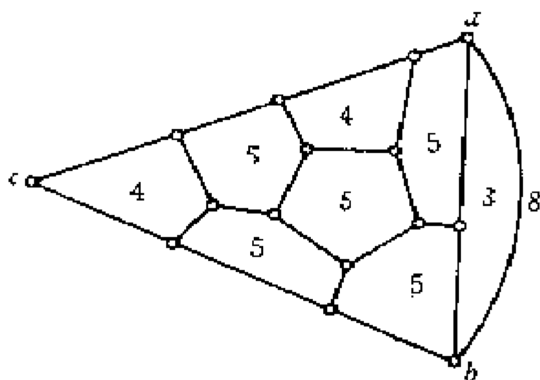


图 11.16

证明 否则，设 C 为过边(a,b)的哈密尔顿回路，由定理 11.23可知

$$(r_3' - r_3'') + 2(r_4' - r_4'') + 3(r_5' - r_5'') + 6(r_8' - r_8'') = 0. \tag{1}$$

由于 C 过边(a,b)，所以次数为 3 的面为内部面，次数为 8 的面为外部面，于是，$r_3'=1$，$r_3''=0$，$r_8'=0$，而 $r_8''=1$，这 4 个数代入(1)得

$$2(r_4'-r_4'')+3(r_5'-r_5'')=5. \tag{2}$$

因为 $d(c)=2$，所以边界过 c 的次数为 4 的面是内部面，另一个次数为 4 的面有两种可能，因而 $r_4'=1, r_4''=1$ 或 $r_4'=2, r_4''=0$，代入(2)，

$$3(r_5'-r_5'')=5, \tag{3}$$

或

$$3(r_5'-r_5'')=1. \tag{4}$$

图中有 5 个次数为 5 的面，设其中有 j 个是内部面，$5-j$ 是外部面，于是

$$3(r_5'-r_5'')=6j-15,\quad j=5,4,\cdots,1,0. \tag{5}$$

$j=5$ 时，$3(r_5'-r_5'')=15$，

$j=4$ 时，$3(r_5'-r_5'')=9$，

$j=3$ 时，$3(r_5'-r_5'')=3$，

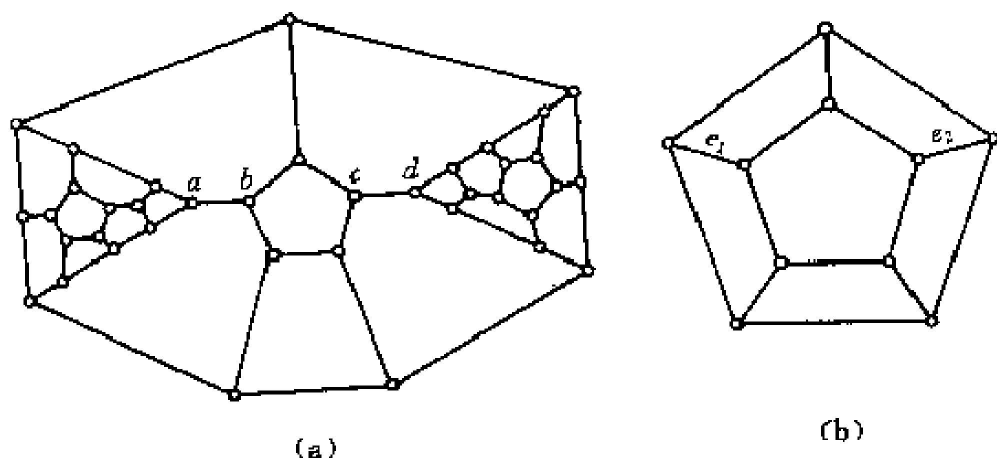
$j=2$ 时，$3(r_5'-r_5'')=-3$，

$j=1$ 时，$3(r_5'-r_5'')=-9$，

$j=0$ 时，$3(r_5'-r_5'')=-15$.

无论哪种情况都不满足(3)，也不满足(4)，所以 G 中不存在过边 (a,b) 的哈密尔顿回路.

1967 年莱德贝格(Lederberg)给出了一个 38 阶的 3 连通的 3 正则平面图，见图 11.17(a)所示.



(a)　　(b)

图 11.17

把它作为泰特猜想的又一个反例.

【例 11.6】 证明莱德贝格图[图 11.17(a)所示]不是哈密尔顿图.

证明 若该图为哈密尔顿图,因而必存在哈密尔顿回路,设 C 是一条哈密尔顿回路,由例 11.5 可知,C 必须经过边(a,b),又经过边(c,d),这相当于证明图 11.17 中(b)图有既经过 e_1 又经过 e_2 的哈密尔顿回路,但(b)图中不存在这样的哈密尔顿回路(证明留作习题).

用例 11.5 还可以证明托特图不是哈密尔顿图.

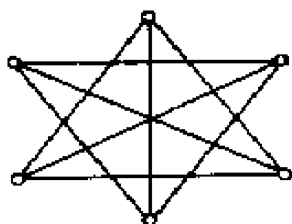
那么,到底什么样的平面图才是哈密尔顿图呢? 托特于 1956 年给出了下面定理.

定理 11.24 任何 4 连通平面图都是哈密尔顿图.

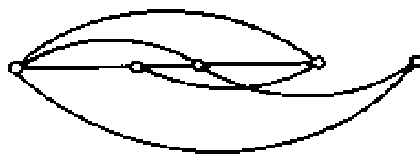
证明从略.

习 题 十 一

1. 证明图 11.18 所示二图均为平面图.



(a)



(b)

图 11.18

2. 用约当定理证明 $K_{3,3}$ 不是平面图.

3. 证明正多面体图(柏拉图图)有且仅有 5 种.

4. 设 G 是简单平面图,面数 $r<12$,$\delta(G)\geqslant 3$.

(1) 证明 G 中存在次数小于等于 4 的面;

(2) 举例说明,若 $r=12$,其它条件不变,则(1)中结论不真.

5. 设 G 是 n 阶 m 条边的简单平面图,已知 $m<30$,证明存在 $v\in V(G)$,

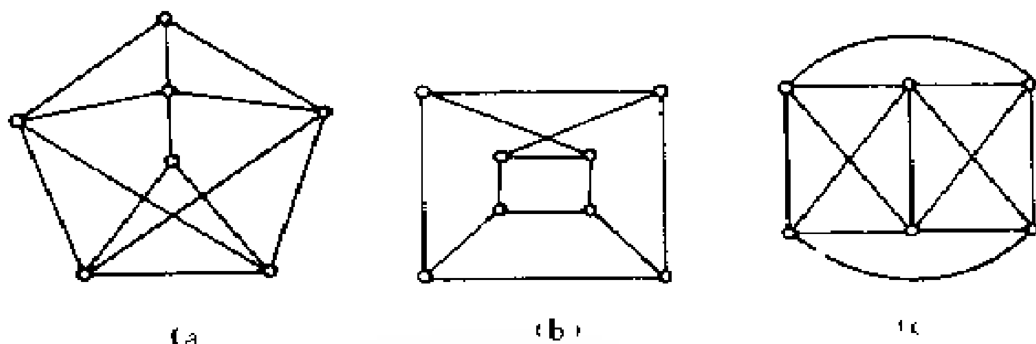
使得 $d(V)\leqslant 4$.

6. 设 G 为 n 阶 m 条边的简单连通平面图，证明：当 $n=7$，$m=15$ 时 G 为极大平面图.

7. 设 G 是 $n(n\geqslant 11)$ 阶无向简单图，证明 G 或 $\bar{G}$ 必为非平面图

8. 利用欧拉公式证明定理 11.4 的充分性.

9. 证明图 11.19 所示各图均为非平面图.



(a)　　　(b)　　　(c)

图 11.19

10. 画出所有 6 阶连通的简单非同构的非平面图.

11. 设 n 阶 m 条边的平面图是自对偶图，证明 $m=2n-2$.

12. 设 G 为极大的平面图，证明 G 的对偶图 G^* 是 2 边连通的 3 正则图.

13. 设 G 是 2 边连通的简单平面图，且每两个面的边界至多有一条公共边，证明 G 中至少有两个面的次数相同.

14. 证明：平面图 G 的对偶图 G^* 是欧拉图当且仅当 G 中每个面的次数均为偶数.

15. 证明：不存在具有 5 个面，且每两个面的边界都共享一条公共边的平面图.

16. 设 G 是连通的 3 正则平面图，r_i 是 G 中次数为 i 的面的个数，证明

$$12=3r_3+2r_4+r_5-r_7-2r_8-3r_9-\cdots$$

17. 设 G 是 $n(n\geqslant 7)$ 阶外平面图，证明 $\bar{G}$ 不是外平面图.

18. 证明图 11.17(b) 是哈密尔顿图，但不存在既含边 e_1 又含边 e_2 的哈密尔顿回路

19. 证明图 11.15 所示的托特图不是哈密尔顿图.

第十二章　图的着色

图的着色问题起源于四色猜想.所谓四色猜想是要求证明这样的问题:至多用4种颜色给平面或球面上的地图着色,使得相邻的国家着不同颜色.这个问题的提法简单易懂,但时至今日还没有得到很好的解决.本章介绍图中顶点、边和平面地图的面着色问题.

§12.1　点着色

本节讨论的是无环的无向图.

定义12.1　对无环图G顶点的一种着色,是指对它的每个顶点涂上一种颜色,使得相邻的顶点涂不同颜色.若能用k种颜色给G的顶点着色,就称对G进行了k着色,也称G是k-可着色的,若G是k-可着色的,但不是$(k-1)$-可着色的,就称G是**k-色图**,称这样的k为G的**色数**,记作$\chi(G)=k$.

从定义不难证明下面定理.

定理12.1　$\chi(G)=1$当且仅当G为零图.

定理12.2　$\chi(K_n)=n$.

定理12.3　奇圈和奇数阶轮图都是3色图,而偶数阶轮图为4色图.

定理12.4　图G是2-可着色的当且仅当G为二部图.

推论1　$\chi(G)=2$当且仅当G为非零图的二部图.

推论2　图G是2-可着色的当且仅当G中不含奇圈.

本推论由定理7.8得证.

定理12.5　对于任意的图G,均有

$$\chi(G) \leqslant \Delta(G) + 1.$$

证明　对 G 的阶数 n 作归纳法.

$n=1$ 时,结论显然成立.

设 $n=k$ 时结论成立,设 G 的阶数 $n=k+1$,v 为 G 中任一顶点,设 $G_1=G-v$,则 G_1 的阶数为 k,由归纳假设应有 $\chi(G_1)\leqslant\Delta(G_1)+1\leqslant\Delta(G)+1$. 当将 G_1 还原成 G 时,由于 v 至多与 G_1 中 $\Delta(G)$ 个顶点相邻,而在 G_1 的点着色中,$\Delta(G)$ 个顶点至多用了 $\Delta(G)$ 种颜色,于是 $\Delta(G)+1$ 种颜色中至少存在一种颜色给 v 着色,使 v 与相邻的顶点均着不同的颜色. ▌

对有些图来说,定理 12.5 中给出的色数的上界是比较大的,例如,若 G 是二部图,$\Delta(G)$ 可以很大,但 $\chi(G)=2$. 于是有必要缩小定理中 $\chi(G)$ 的上界. 布鲁克斯(Brooks)改进了定理 12.5 中 $\chi(G)$ 的上界,不过要求 G 不是完全图,也不是奇圈,因为若 G 为 n 阶完全图或 n 阶奇圈,则 $\chi(G)=\Delta(G)+1$. 下面定理为布鲁克斯定理.

定理 12.6(Brooks)　设连通图不是完全图 $K_n(n\geqslant3)$ 也不是奇圈,则

$$\chi(G) \leqslant \Delta(G).$$

本定理的证明请参阅参考书目[6].

【例 12.1】　证明彼得森图的色数 $\chi=3$.

证明

方法一. 用定理证明,由布鲁克斯定理可知,$\chi\leqslant\Delta=3$. 又因为图中有奇圈,由定理 12.3 可知,$\chi\geqslant3$,所以 $\chi=3$.

方法二. 因为图中有奇圈,由定理 12.3 可知,$\chi\geqslant3$,又因为图中存在 3 种颜色的着色,即图是 3 可着色的,见图 12.1 所示,图中顶点处所标的数字 i 表示该顶点所涂第 i 种颜色,$i=1,2,3$,所以 $\chi\leqslant3$,故 $\chi=3$.

定理 12.7　对图 G 进行 $\chi(G)$ 着色,设

$V_i=\{v\,|\,v\in V(G)$ 且 v 涂颜色 $i\}$,$i=1,2,\cdots,\chi(G)$,

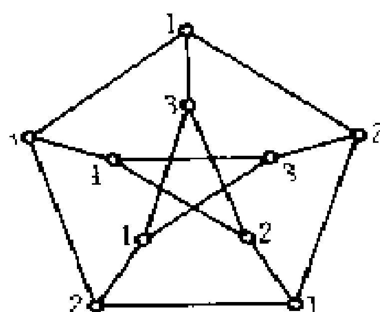


图 12.1

则 $\Pi=\{V_1,V_2,\cdots,V_{\chi(G)}\}$ 是 $V(G)$ 的一个划分.

本定理的等价形式为：

定理 12.7 对图 G 进行 $\chi(G)$ 着色，设

$$R=\{<u,v>\mid u,v\in V(G) \text{ 且 } u,v \text{ 涂一样颜色}\},$$

则 R 是 $V(G)$ 上的等价关系.

以上两上定理证明简单.

§12.2 色多项式

本节中所谈图仍指无环无向图.

定义 12.2 设 G 是 n 阶无向图. 对 G 进行的两个 k 着色被认为是不同的，是指至少有一个顶点在两个 k 着色中被涂不同颜色，以 $f(G,k)$ 表示 G 的不同 k 着色方式的总数，称 $f(G,k)$ 为 G 的**色多项式**.

若 $k<\chi(G)$，显然有 $f(G,k)=0$，而 $\chi(G)$ 是使 $f(G,k)>0$ 的最小整数.

对于任意给定的图 G，求它的色多项式不是一件容易的事情.

定理 12.8 $f(K_n,k)=k(k-1)\cdots(k-n+1)$，$f(N_n,k)=k^n$，其中 K_n，N_n 分别为 n 阶完全图和 n 阶零图.

证明 给 K_n 的顶点标定为 $v_1,v_2,\cdots,v_n$. 显然，可用 k 种颜色中的任一种颜色给 v_1 涂色. 可用剩下的 $k-1$ 种颜色中的任何一

种给 v_2 涂色，……，最后用 $(k-n+1)$ 种颜色中的任何一种给 v_n 涂色，由乘法法则有

$$f(K_n,k)=k(k-1)\cdots(k-n+1).$$

N_n 中任何顶点都可以用 k 种颜色中的任何一种涂色，所以 $f(N_n,k)=k^n$. ∎

推论 $f(K_n,k)=f(K_{n-1},k)(k-n+1), n\geq 2$.

【例 12.2】 求 $f(K_n,6)$，$n\geq 1$.

解 $f(K_1,6)=6$，

$f(K_2,6)=f(K_1,6)\cdot(6-2+1)=6\times 5=30$，

$f(K_3,6)=f(K_2,6)\cdot(6-3+1)=30\times 4=120$，

$f(K_4,6)=f(K_3,6)\cdot(6-4+1)=120\times 3=360$，

$f(K_5,6)=360\times 2=720$，

$f(K_6,6)=720\times 1=720$，

$f(K_n,6)=0, n\geq 7$.

定理 12.9 在无环无向图 G 中，$V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$.

(1) $e=(v_i,v_j)\notin E(G)$，则

$$f(G,k)=f(G\cup(v_i,v_j),k)+f(G\backslash(v_i,v_j),k).$$

(2) $e=(v_i,v_j)\in E(G)$，则

$$f(G,k)=f(G-e,k)-f(G\backslash e,k).$$

其中，$G\backslash(v_i,v_j)$ 在这里表示将 v_i,v_j 合并成一个顶点 w_{ij}，使它关联 v_i,v_j 关联的一切边.

证明 (1) 在 G 的着色中，顶点 v_i,v_j 涂不同颜色的 k 着色数正好等于 $G\cup(v_i,v_j)$ 的 k 着色数，而 v_i,v_j 涂相同颜色的 k 着色数又正好等于 $G\backslash(v_i,v_j)$ 的 k 着色数. 于是

$$f(G,k)=f(G\cup(v_i,v_j),k)+f(G\backslash(v_i,v_j),k).$$

(2) 由于 v_i,v_j 在 G 中相邻，所以在 G 的 k 着色中，v_i,v_j 不能涂相同颜色. 而在 $G-e$ 的 k 着色中，v_i,v_j 可以涂相同的颜色，也可以涂不同的颜色，又在 $G\backslash e$ 中，代替 v_i,v_j 的顶点 w_{ij} 的每种 k 着色，都对应着 $G-e$ 中 v_i,v_j 涂相同颜色的一种 k 着色，于是

$$f(G,k)+f(G\backslash e,k)=f(G-e,k),$$

即 $$f(G,k)=f(G-e,k)-f(G\backslash e,k).\quad ▍$$

推论 $f(G,k)=f(K_{n_1},k)+f(K_{n_2},k)+\cdots+f(K_{n_r},k)$. 且 $\chi(G)=\min\{n_1,n_2,\cdots,n_r\}$.

证明 反复对 $f(G,k)$ 应用定理 12.9 中的(1)，及 $\chi(G)$ 是使 $f(G,k)>0$ 的最小的 k，本推论得证. ▍

【例 12.3】 求图 12.2 所示图 G 的色多项式.

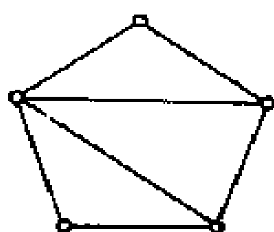


图 12.2

解 在使用定理 12.9 中公式(1)进行演算时，若出现平行边都只保留一条边. 演算中图的变化过程如图 12.3 所示.

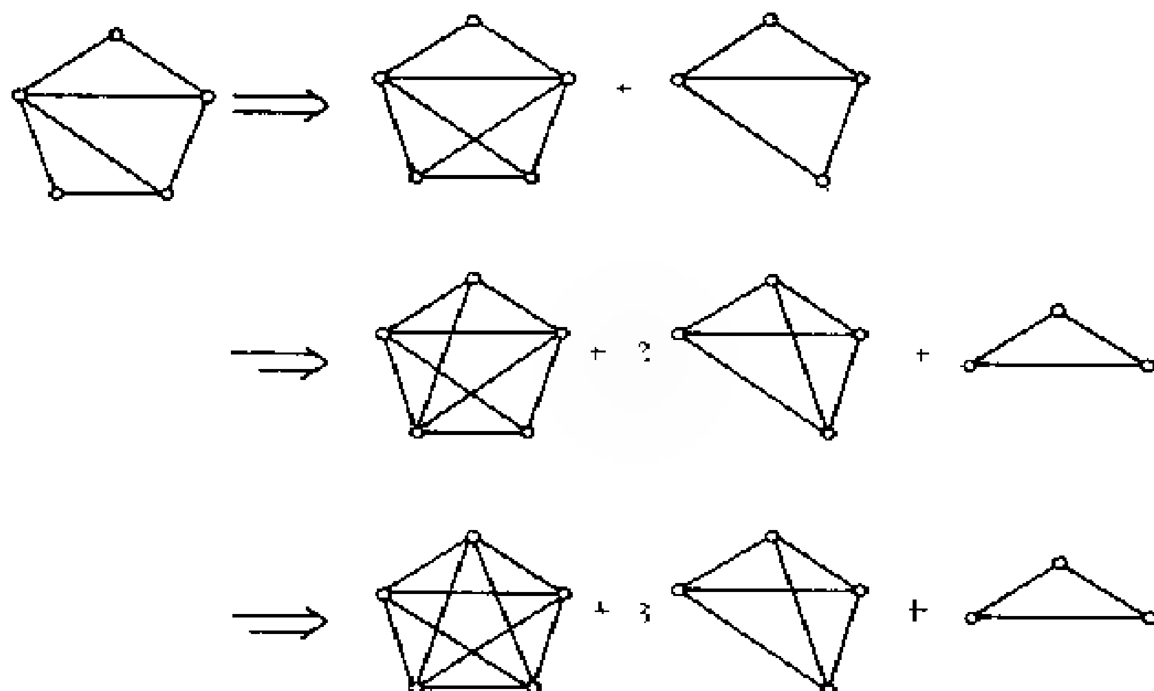


图 12.3

由图 12.3 最后一步可得

$$f(G,k)=f(K_5,k)+3f(K_4,k)+f(K_3,k)$$

$$=k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)+3k(k-1)(k-2)(k-3)+k(k-1)(k-2)$$

$$=k(k-1)(k-2)(k^2-7k+12+3k-9+1)$$

$$=k(k-1)(k-2)^3$$

$$=k^5-7k^4+18k^3-20k^2+8k.$$

由以上演算可知，$\chi(G)=\min\{5,4,3\}=3$，当 $k=3$ 时，$f(G,3)=6$.

可以证明色多项式有下列性质.

(1) $f(G,k)$是 n 次多项式，其中 n 为 G 的阶数；

(2) $f(G,k)$中，k^n 的系数为 1，常数项为 0；

(3) k^{n-1}的系数为 $-m$，m 为 G 中边数；

(4) 若 G 有 p 个连通分支 $G_1,G_2,\cdots,G_p$，$p\geqslant 1$，则

$$f(G,k)=\prod_{i=1}^{p} f(G_i,k);$$

(5) $f(G,k)$中，系数非 0 的项的最低次幂为 k^p，p 为 G 的连通分支数.

(6) $f(G,k)$的系数符号是正负交替的.

定理 12.10 设 V_1 是 G 的点割集，且 $G[V_1]$是 G 的 $|V_1|$阶完全子图，$G-V_1$ 有 $p(p\geqslant 2)$个连通分支 $G_1,G_2,\cdots,G_p$，则

$$f(G,k)=\frac{\prod_{i=1}^{p} f(H_i,k)}{f(G[V_1],k)^{p-1}}.$$

其中，$H_i=G[V_1\cup V(G_i)]$，$i=1,2,\cdots,p$.

证明 因为对 $G[V_1]$的每种 k 着色，H_i 有 $f(H_i,k)/f(G[V_1],k)$ 种 k 着色，所以

$$f(G,k)=f(G[V_1],k)\cdot\prod_{i=1}^{p}\frac{f(H_i,k)}{f(G[V_1],k)}$$

$$= \prod_{i=1}^{p} \frac{f(H_i,k)}{f(G[V_1],k)^{p-1}}. \qquad \blacksquare$$

定理 12.11 T 是 n 阶树当且仅当 $f(T,k)=k(k-1)^{n-1}$.

证明 必要性. 对边数 m 作归纳法.

$m=0$ 或 1 时结论成立.

设 $m\leqslant r(r\geqslant 2)$ 时结论成立. 当边数 $m=r+1$ 时，顶点数 $n=r+2$. G 中必存在悬挂顶点及悬挂边. 设 v 为悬挂顶点，(v,u) 为悬挂边，则 u 是割点，$V_1=\{u\}$ 是点割集. $G[V_1]$ 是以 u 为顶点的完全图 K_1. $G-V_1$ 有 $d_G(u)=t$ 个连通分支 $T_1,T_2,\cdots,T_t$，每个连通分支都是树，设 n_i 为 T_i 的顶点数，则 $\sum_{i=1}^{t} n_i=n-1$. 设 $H_i=G[V_1\cup V(T_i)]$，则 H_i 是 n_i 条边的树，$i=1,2,\cdots,t$，且 $n_i\leqslant r$，由归纳假设知道 $f(H_i,k)=k(k-1)^{n_i}$，$i=1,2,\cdots,t$. 由定理 12.10 得

$$\begin{aligned} f(T,k) &= \frac{\prod_{i=1}^{t} f(H_i,k)}{f(G[V_1],k)^{t-1}} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^{t} k(k-1)^{n_i}}{k^{t-1}} \\ &= \frac{k^t(k-1)^{\sum_{i=1}^{t} n_i}}{k^{t-1}} = k(k-1)^{n-1}. \end{aligned}$$

充分性.

$$\begin{aligned} f(T,k) &= k(k-1)^{n-1} = k\left(\sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^{i} k^{n-1-i}(-1)^i\right) \\ &= k\left(k^{n-1}-(n-1)k^{n-2}+\frac{(n-1)(n-2)}{2}k^{n-3}-\cdots+(-1)^{n-1}\right) \\ &= k^n-(n-1)k^{n-1}+\frac{(n-1)(n-2)}{2}k^{n-2}-\cdots+(-1)^{n-1}k. \end{aligned}$$

由以上式子可看出，$f(T,k)$ 是 n 次多项式，所以 T 的阶数为 n，又 k^{n-1} 的系数为 $-(n-1)$，所以 T 的边数为 $n-1$，又因为系数非 0 项的最低次幂为 k，所以 T 是连通的，于是 T 是树. ∎

定理 12.12 若 G 是 n 阶圈，则

$$f(G,k)=(k-1)^n+(-1)^n(k-1).$$

证明 对 G 的阶数 n 作归纳法.

$n=3$ 时，G 为 3 阶完全图，由定理 12.8 可知 $f(G,k)=k(k-1)(k-2)=(k-1)^3+(-1)^3(k-1)$，所以 $k=3$ 时结论成立.

设 $n=r(r\geqslant 4)$ 时结论成立. $n=r+1$ 时，从 G 中任取一条边 e，则 $G-e$ 为 $r+1$ 阶树，由定理 12.11 可知，

$$f(G-e)=k(k-1)^{r+1}.$$

而 $G\backslash e$ 为 r 阶圈，由归纳假设可知

$$f(G\backslash e)=(k-1)^r+(-1)^r(k-1).$$

由定理 12.9 中(2)式可得

$$\begin{aligned}f(G,k)&=f(G-e,k)-f(G\backslash e,k)\\&=k(k-1)^{r+1}-(k-1)^r-(-1)^r(k-1)\\&=(k-1)^r(k-1)+(-1)^{r+1}(k-1)\\&=(k-1)^{r+1}+(-1)^{r+1}(k-1)\\&=(k-1)^n+(-1)^n(k-1).\end{aligned}$$ ▌

【例 12.4】 某系二年级学生共选修全校性的选修课程 n 门，期末考试前应将这 n 门课程先考完，要求每天每个学生至多只能参加一门课程的考试，至少需要几天才能使每个学生将所选的课程都考完？当 $n=5$ 时，设这 5 门课程分别为 $c_1,c_2,\cdots,c_5$，已知有的学生既选 c_1 又选 c_2，有的既选 c_2 又选 c_3，有的既选 c_3 又选 c_4，有的既选 c_4 又选 c_2，也有的既选 c_4 又选 c_5，问在安排最少天数的条件下，至多有多少安排方案？

解 设 $V=\{c_1,c_2,\cdots,c_n\}$ 为课程集合. 又设 $S(c_i)$ 为学习 c_i 的学生集合，若 $S(c_i)\cap S(c_j)\neq\varnothing$，$i\neq j$，让 c_i 与 c_j 相邻，做无向简单图 G，给 G 的顶点集一种 $k(k\geqslant\chi(G))$ 着色，同色顶点对应的课程可以同一天考试，于是就得到一种安排方案. 当 $k=\chi(G)$ 时所得方案安排的天数最少.

当 $n=5$ 时，由题设 $S(c_1)\cap S(c_2)\neq\varnothing$，$S(c_2)\cap S(c_3)\neq\varnothing$，

$S(c_3)\cap S(c_4)\neq\varnothing$, $S(c_4)\cap S(c_2)\neq\varnothing$ 且 $S(c_4)\cap S(c_5)\neq\varnothing$，于是得图 G 如图 12.4 所示. 容易知道 $\chi(G)=3$，于是至少安排 3 天才能考所有课程.

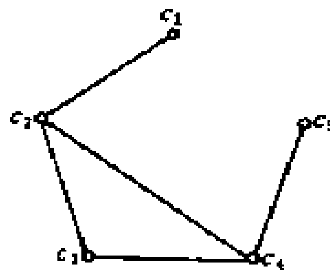


图 12.4

求色多项式 $f(G,k)$，并计算 $f(G,3)$，就可以得出最多的安排方案数，用定理 12.9 或定理 12.10 均可求出色多项式

$$f(G,k)=k^5-5k^4+9k^3-7k^2+2k,$$

于是

$$f(G,\chi(G))=f(G,3)=24.$$

所以，在安排最少天数的情况下，至多有 24 种安排方案.

§12.3 地图的着色与平图图的点着色

定义 12.3 连通的无桥平面图的平面嵌入及其所有的面称为**平面地图**或**地图**，平面地图的面称为"**国家**". 若两个国家的边界至少有一条公共边，则称这两个国家是相邻的.

定义 12.4 平面地图 G 的一种着色，是指对它的每个国家涂上一种颜色，使相邻的国家涂不同种颜色. 若能用 k 种颜色给 G 着色，就称对 G 的面进行了 k 着色，或称 G 是 k-面可着色的. 若 G 是 k-面可着色的，但不是 $(k-1)$-面可着色的，就称 G 是 k **色地图**，或称 G 的**面色数**为 k，记作 $\chi^*(G)=k$.

对于地图的面着色可以通过平面图的点着色来研究，这是因为平面图都有对偶图.

定理 12.13 地图 G 是 k-面可着色的当且仅当它的对偶图 G^* 是 k 可着色的.

证明 必要性. 给 G 的一种 k 着色. 由定理 11.15 可以知道，$n^*=r$，即 G 的每个面中含且只含 G^* 的一个顶点，设 v_i^* 位于 G 的面 R_i 内，将 v_i^* 涂 R_i 的颜色. 易知，若 v_i^* 与 v_j^* 相邻，则由于 R_i 与 R_j 的颜色不同，所以 v_i^* 与 v_j^* 颜色不同，即 G^* 是 k 可着色的.

类似可证充分性. ▌

可以将定理 12.13 等价地叙述成如下形式.

定理 12.14 设 G 是连通的无环的平面图，G^* 是 G 的对偶图，则 G 是 k 可着色的当且仅当 G^* 是 k 面可着色的.

定理中的 G^* 是地图(因为 G 中无环，所以 G^* 中无桥).

由以上两个定理可知，研究地图的着色(面着色)等价于研究平面图的点着色.

利用定理 11.12 可以证明任何平面图都是 6 可着色的，进而可以证明任何平面图都是 5 可着色的，但用定理 11.12 不能证明任何平面图都是 4 可着色的.

定理 12.15 任何平面图都是 6 可着色的.

证明 不妨设 G 是连通的简单的平面图，当 G 中顶点数(阶数)$n<7$ 时，结论自然为真，当 $n\geq 7$ 时，对 n 作归纳法.

(1) $n<7$ 时结论为真.

(2) 设 $n=k(k\geq 7)$时结论为真，当 $n=k+1$ 时，如下证明. 根据定理 11.12，存在 $v\in V(G)$，$d(v)\leqslant 5$. 令 $G_1=G-v$，则 G_1 的顶点数 $n_1=k$，由归纳假设知 G_1 是 6 可着色的. 当将 G_1 还原成 G 时，由于与 v 相邻的顶点至多用 5 种颜色涂色，因而总存在 6 种颜色中的一种颜色给 v 涂色，所以 G 是 6 可着色的. ▌

其实用 5 种颜色就可以给任何平面图点着色，这就是希伍德(Heawood)定理.

定理 12.16(Heawood) 任何平面图都是5可着色的.

本定理与定理 12.15 在证明中最本质的区别是要给顶点换颜色.

证明 仍设 G 是连通的简单的平面图.设5种颜色分别用1,2,3,4,5所代表.并且 v_i 表示涂颜色 i 的顶点,$i=1,2,\cdots,5$.仍对 n 作归纳法.

(1) $n\leqslant 5$ 时,结论显然.

(2) 设 $n=k(k\geqslant 5)$ 时结论成立.$n=k+1$ 时如下证明.

由定理 11.12 可知,存在 $v\in V(G)$,$d(v)\leqslant 5$.设 $G_1=G-v$,则 G_1 是 k 阶图,由归纳假设可知,G_1 是5-可着色的,下面证明将 G_1 还原的成 G 时,v 是可着色的.

① 若 $d(v)<5$,v 的着色无问题.

② 若 $d(v)=5$,但与 v 相邻的顶点在 G_1 的着色中至多用了4种颜色,v 的着色也无问题.

③ 若 $d(v)=5$,且与 v 相邻的5个顶点在 G_1 的着色中已经用了5种颜色,这样 v 的着色就成了问题,解决办法如下.

设 $V_{1,3}=\{v \mid 在 G_1 的着色中 v 着 1 或 3\}$,并且 $G_{1,3}=G[V_{1,3}]$.

ⓐ 若 v_1 与 v_3 属于 $G_{1,3}$ 的不同连通分支,则将 v_1 所在的连通分支中,1,3两种颜互换,于是 v_1 涂颜色3,腾出1来给 v 着色,见图 12.5(a),(b)所示.

ⓑ 若 v_1 与 v_3 在 $G_{1,3}$ 的同一个连通分支中,此时,$G[V_{1,3}\cup\{v\}]$ 含回路 C,v 在 C 上,除 v 外,在 C 上的顶点涂1与涂3的顶点交替出现.再令 $V_{2,4}=\{v \mid v 在 G_1 中涂颜色 2 或 4\}$,$G_{2,4}=G[V_{2,4}]$,由于 C 的隔离,v_2,v_4 必在 $G_{2,4}$ 的不同的连通分支中,在 v_2 所在的连通分支中,将颜色2,4互换,腾出颜色2给 v 涂色,见图 12.6 所示. ▌

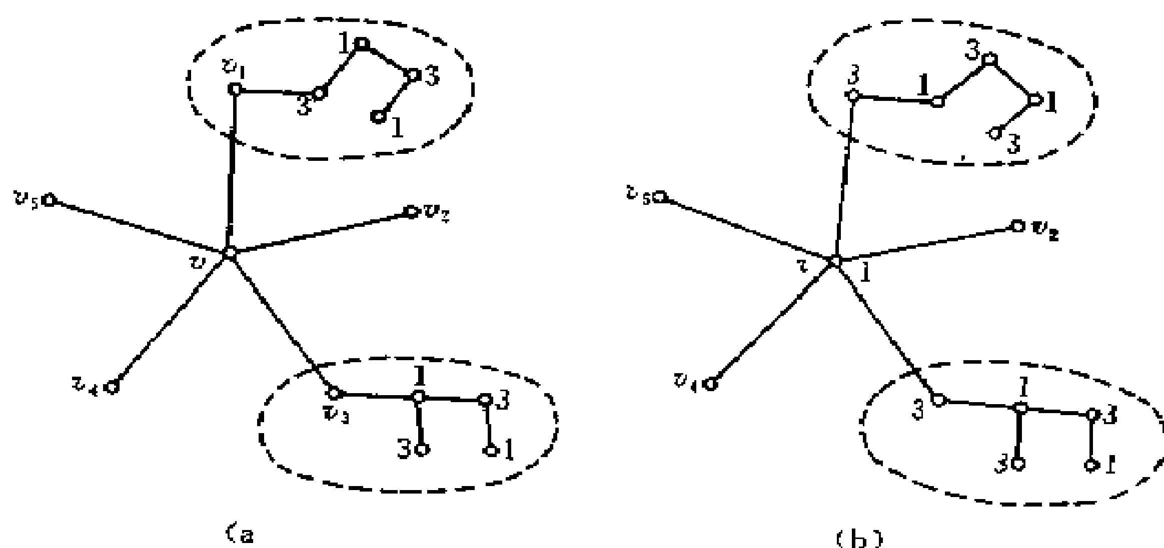


图 12.5

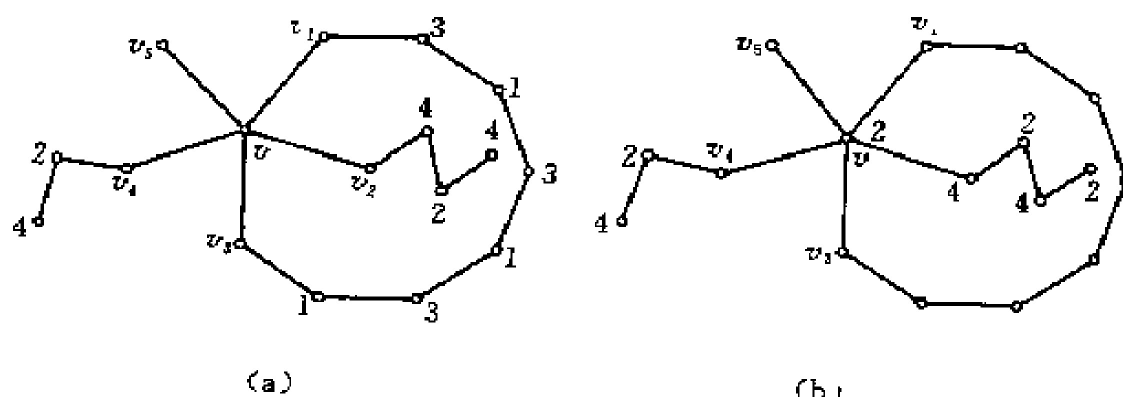


图 12.6

定理 12.16 称为希伍德的 5 色定理.

1879 年 Kempe 自称用定理 11.12 及换顶点颜色的方法证明了四色猜想,即任何平面图都是 4 可着色的,1890 年希伍德举出了 25 阶的反例说明 Kempe 的证明是不对的,而他本人证明了 5 色定理,到目前为止,四色猜想没有得到彻底的解决.若四色猜想得到证明,关于平面图的着色理论就得到了最好的解决,因为对任何的偶数阶轮图 $W_n(n\geq 4)$,有 $\chi(W_n)=4$.

§ 12.4 边 着 色

本节仍对无环无向图进行讨论.

定义 12.5 对图 G 边的一种着色,是指对它的每条边涂上一种颜色,使得相邻的边涂不同的颜色. 若能用 k 种颜色给 G 的边着色就称对 G 的边进行了 k 着色,或称 G 是 k 边可着色的. 若 G 是 k 边可着色的,但不是$(k-1)$边可着色的,就称 k 是 G 的**边色数**,记作 $\chi'(G)$.

关于边色数有下面定理,即维津(Vizing)定理.

定理 12.17(Vizing) 设 G 是简单图,则 $\Delta(G)\leqslant\chi'(G)\leqslant\Delta(G)+1$.

本定理的证明请参阅参考书目[6].

维津定理说明,对于简单图 G,$\chi'(G)$只能取两个值,即 $\Delta(G)$ 或 $\Delta(G)+1$. 但究竟哪些图的 χ' 是 Δ,哪些是 $\Delta+1$,至今还是一个没有解决的问题. 对于二部图和完全图已经得到了解决.

【例 12.5】 设 $G=\langle V_1,V_2,E\rangle$ 为二部图,则 $\chi'(G)=\Delta(G)$.

证明 以下简记 $\Delta(G)$为 Δ. 设 $d(w)=\Delta$,给与 w 关联的边着色至少需要 Δ 种颜色,所以,$\chi'(G)\geqslant\Delta$. 下面再证明 $\chi'(G)\leqslant\Delta$ 即可. 对边数 m 作归纳法.

(1) $m=0$(G 为零图),$\chi'(G)=\Delta=0$.

(2) 设当 $m=k(k\geqslant1)$时结论成立,当 $m=k+1$ 时,如下证明. 设 $e=(u,v)\in E(G)$,令 $G_1=G-e$,则 G_1 中有 k 条边,由归纳假设知 $\chi'(G_1)\leqslant\Delta(G_1)\leqslant\Delta(G)=\Delta$,因而 G_1 存在着边的 Δ 着色. 由于 $d_{G_1}(u)$ 与 $d_{G_1}(v)<\Delta$,所以在对 G_1 的边进行 Δ 着色时,至少有一种颜色不出现在 u(即与 u 关联的边都不涂此颜色),同样至少有一种颜色不出现在 v.

① 若存在颜色 α 既不出现 u,也不出现在 v,当将 G_1 还原成 G 时,将边 $e=(u,v)$涂 α,于是完成了 G 的边的 Δ 着色,因而 $\chi'(G)$

$\leqslant\Delta$.

(2) 若不出现 u 和不出现 v 的颜色有如下特点：不出现在 u 的颜色都出现在 v，反之亦然. 设 γ 不出现 u，则 γ 一定出现在 v，β 不出现在 v，则 β 一定出现在 u，见图 12.7 中(a)所示，令 $E_{\beta,\gamma}=\{e\mid e\in E(G_1)$ 且 e 涂 β 或 $\gamma\}$，设 $\bar{G}_1=G[E_{\beta,\gamma}]$. 并且设 $H_{\beta,\gamma}(v)$ 是 $\bar{G}_1$ 中含顶点 v 的极大连通子图，下面证明 u 不在 $H_{\beta,\gamma}(v)$ 中. 否则，u，v 必连通，因而必存在 u 到 v 的路径，设 P_1 为 u 到 v 的一条路径，由于 $u\in V_1$，$v\in V_2$，所以 P_1 的长度必为奇数. 于是 γ 既出现在 v 也出现在 u，见图 12.7 中(b)所示，这与在 G_1 中 γ 不出现在 u 相矛盾. 因为 u 不在 $H_{\beta,\gamma}(v)$ 中，可将 $H_{\beta,\gamma}(v)$ 中边的颜色 β 与 γ 互换，腾出 γ 来给边 $e=(u,v)$ 涂色，见图 12.7 中(c)所示，这就完成了对 G 的边的 Δ 着色，所以 $\chi'(G)\leqslant\Delta(G)$. ▌

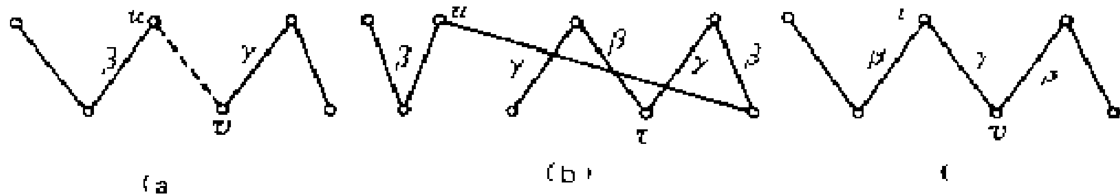


图 12.7

【例 12.6】 当 $n(n\neq 1)$ 为奇数时，$\chi'(K_n)=n$，而当 n 为偶数时，$\chi'(K_n)=n-1$.

证明 (1) $n(n\neq 1)$ 为奇数. 由定理 12.17 知，$\chi'(K_n)\leqslant\Delta+1=n$. 下面证明 $\chi'(K_n)\geqslant n$.

设 K_n 用这种方法做出：先做正 n 边形 C_n，将不相邻的顶点之间都连线段，就可得 K_n，K_n 中共有 n 组平行边，每组 $\frac{1}{2}(n-1)$ 条边，而 $\frac{1}{2}(n-1)$ 条平行边已关联了 $n-1$ 个顶点，所以在 K_n 的边着色中至多有 $\frac{1}{2}(n-1)$ 条同色边，于是

$$\frac{1}{2}(n-1)\chi'(K_n)\geqslant\frac{1}{2}n(n-1)$$

$\Rightarrow \chi'(K_n) \geqslant n$.

(2) $\chi'(K_2)=1$ 是显然的，下设 n 为大于等于4的偶数.

由定理12.17知，$n-1=\Delta\leqslant\chi'(K_n)$，下面证明 $\chi'(K_n)\leqslant n-1$.

K_n 可如下获得：先按(1)中方法做出 K_{n-1}，然后在 K_{n-1} 内部的中心放置一个顶点，使其与 K_{n-1} 的所有顶点相邻($n=6$ 时见图12.8所示)，就得到了 K_n，用 $\chi'(K_{n-1})$ 种颜色先给 K_{n-1} 边着色，然后将 K_n 中相互垂直边涂同色，就完成了 K_n 的边的一个 $\chi'(K_{n-1})$ 的着色，所以 $\chi'(K_n)\leqslant\chi'(K_{n-1})=n-1$.

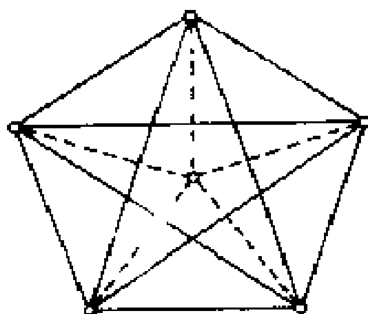


图 12.8

设无环图 $G=\langle V,E\rangle$，对 G 的边进行 k 着色，$k\geqslant\chi'(G)$，令

$$R=\{\langle e,e'\rangle \mid e,e'\in E\wedge e \text{ 与 } e' \text{ 涂同色}\},$$

则 R 是 E 上的等价关系，其商集 $E/R=\{E_1,E_2,\cdots,E_k\}$ 是 E 的一个划分，划分块(等价类)中元素涂同色.

【例12.7】某中学，星期一由 m 位教师给 n 个班上课. 每位教师在同课时只能给一个班上课.

(1) 这一天至少要安排多少节课?

(2) 在节数不增加的条件下至少需要几个教室?

(3) 若 $m=4$，$n=5$，设教员为 t_1,t_2,t_3,t_4，班级为 c_1,c_2,c_3,c_4,c_5，已知 t_1 要为 c_1,c_2,c_3 分别上2节、1节、1节课；t_2 要为 c_2,c_3 各上1节课；t_3 要为 c_2,c_4,c_5 各上1节课；t_4 要为 c_4 上1节，为 c_5 上2节课. 试给出一个最节省教室的课表.

解 设$V_1=\{t_1,t_2,t_3,t_4\}$，$V_2=\{c_1,c_2,c_3,c_4,c_5\}$，$E=\{(t_i,c_j)\mid t_i$ 给c_j上一节课$\}$，得二部图

$$G=\langle V_1,V_2,E\rangle.$$

对G的边进行一种$k(k\geq\chi'(G))$着色，就得到一种节数为k的安排方案.

(1) $k=\chi'(G)=\Delta$时安排的节数最少.

(2) 设$l_1,l_2,\cdots,l_\Delta$分别为同色边数，在节数为Δ条件下，使$\min\max\{l_1,l_2,\cdots,l_\Delta\}$达到最小.

(3) 已知条件[illegible]部图G如图12.9所示.

$\Delta(G)=4$，用4种颜色给G的边涂色，同色边的课同时上，最省教室的方案是4种[illegible]色[illegible]条数为[illegible]条. 按图12.9所示同色边安排的课为表[illegible]，所用教室[illegible]个.

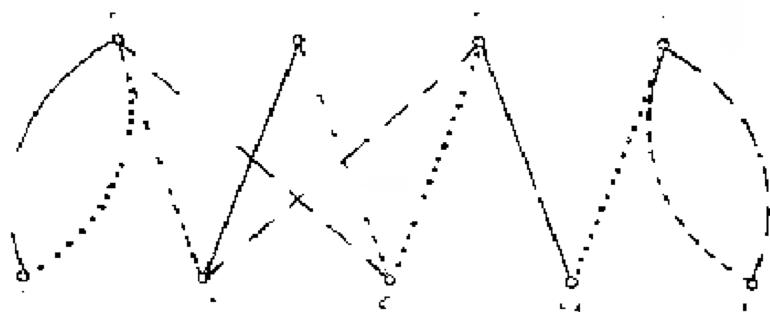


图 12.9

表 12.1

节	1	2	3	4
t_1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
t_2	[illegible]		[illegible]	
t_3	[illegible]	[illegible]		[illegible]
t_4		[illegible]	[illegible]	[illegible]

习 题 十 二

1. 无向图 G 如图 12.10 所示.

(1) 求 G 的色多项式 $f(G,k)$;

(2) 求 $\chi(G)$;

(3) 计算 $f(G,\chi(G))$, $f(G,4)$.

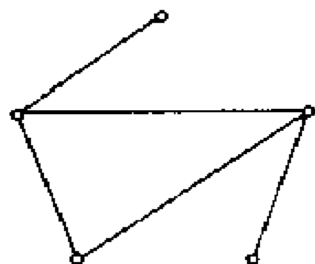


图 12.10

2. 用定理 12.10 求图 12.10 中的 G 的色多项式 $f(G,k)$.

3. 设 G 是由一棵 $n(n\geq 2)$ 阶树和一个 $m(m\geq 3)$ 阶圈组成的图,求 $f(G,K)$.

4. 证明色多项式 $f(G,k)$ 的系数的符号是正负相间的.

5. 设 G 是 n 阶 k 正则图,证明

$$\chi(G)\geq \frac{n}{n-k}.$$

6. 设 G 是不含 K_3 的连通的简单的平面图.

(1) 证明 $\delta(G)\leq 3$;

(2) 证明 G 是 4 可着色的.

7. 设 G 是连通的简单的平面图,围长 $g(G)\geq l\geq 4$.

(1) 证明 $\delta(G)\leq l-1$;

(2) 证明 G 是 l 可着色的.

8. 设 G 是简单图,$\chi(G)=k$,$\forall v\in V(G)$,有 $\chi(G-v)<\chi(G)$,则称 G 是 k 临界的.

(1) 给出所有 2 临界图和 3 临界图;

(2) 给出一些 4 临界图的例子;

(3) 若 G 是 k 临界图,证明:$\forall v\in V(G)$,均有 $d(v)\geq k-1$.

9. 证明一个地图 G 是 2 面可着色的当且仅当 G 是欧拉图.

10. 设 G 是连通的简单的平面图,且对 G 中存在次数小于等于 4 的内部面,证明 G 是 4 面可着色的.

11. 设 G 是 3 正则哈密尔顿图,则 G 的边色数 $\chi'(G)=3$.

12. 设 G 为彼得森图.

(1) 证明 $\chi'(G)=4$;

(2) 证明 G 不是哈密尔顿图.

13. 设 G 是连通的简单的平面图. 证明：G 既是 2 面可着色的又是 2 顶点可着色的当且仅当 G 是不含奇圈的欧拉图.

14. 某年级学生共选修 6 门课程. 期末考试前，必须提前将这 6 门课程考完，每人每天只在下午至多考一门课程. 设 6 门课程分别为 c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6，$S(c_i)$ 为学习 c_i 的学生集合，已知 $S(c_i)\cap S(c_6)\neq\varnothing$，$i=1,2,\cdots,5$，$S(c_i)\cap S(c_{i+1})\neq\varnothing$，$i=1,2,3,4$，$S(c_1)\cap S(c_5)\neq\varnothing$. 问至少安排几天才能考完这 6 门课程；在天数不增加的条件下，至多有几种安排方案？

第十三章　支配集、覆盖集、独立集与匹配

若无特殊声明，本章讨论的图都是无向图，并且是简单图．一般情况下，在定义或定理中不再指明简单图．

§13.1　支配集、点覆盖集、点独立集

定义 13.1　设无向图 $G=\langle V,E\rangle$，$V^*\subset V$，若对于任意的 $v_i\in V-V^*$，都存在 $v_j\in V^*$，使得 $(v_j,v_i)\in E$，则称 v_j 支配 v_i，并称 V^* 为 G 的一个**支配集**．设 V^* 是 G 中支配集，但 V^* 的任何真子集都不是支配集，则称 V^* 为**极小支配集**．顶点数最少的支配集称为**最小支配集**．最小支配集中的顶点个数称为**支配数**，记作 $\gamma_0(G)$，或简记为 γ_0．

在 v_0 为星心，$v_1,v_2,\cdots,v_{n-1}$ 为树叶的 n 阶星形图 S_n 中，$\{v_0\}$，$\{v_1,v_2,\cdots,v_{n-1}\}$ 均为支配集，且都是极小支配集，其中 $\{v_0\}$ 是最小支配集，支配数 $\gamma_0=1$．在图 13.1 所示的轮图 W_7 中，$\{v_0\}$，$\{v_1,v_4\}$，$\{v_1,v_3,v_5\}$ 等都是极小支配集，$\{v_0\}$ 为最小支配集，支配数 $\gamma_0=1$．从定义不难看出最小支配集一定是极小支配集，但反之不真．

定理 13.1　设无向图 G 中无孤立顶点，V_1^* 为 G 的一个极小支配集，则 G 中存在另一个极小支配集 V_2^*，使得 $V_1^*\cap V_2^*=\varnothing$．

证明　先证 $V(G)-V_1^*$ 是支配集．否则存在 $v_0\in V_1^*$，使得对于任意的 $v\in V(G)-V_1^*$，均有 $(v_0,v)\notin E$．因而存在 $v'\in V_1^*-\{v_0\}$，使得 $(v_0,v')\in E$，否则 v_0 成为孤立点了．于是 $V_1^*-\{v_0\}$ 仍为 G 中支配集，这与 V_1^* 是极小支配集矛盾．于是 $V(G)-V_1^*$ 是支配集．再证 $V(G)-V_1^*$ 中存在极小支配集．其实，若 $V(G)-V_1^*$ 已无真子集为支配集了，取 $V_2^*=V(G)-V_1^*$ 即可，否则必存在真子集

是极小支配集，取作 V_2^*，则 $V_1^* \cap V_2^* = \varnothing$ 是显然的. ▌

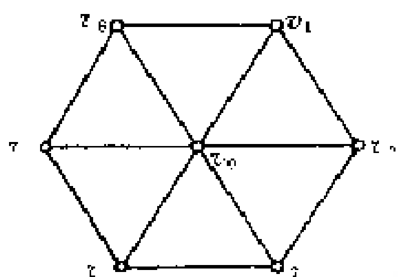


图 13.1

定义 13.2 设无向图 $G=\langle V,E\rangle$ 中，$V^* \subseteq V$，若 V^* 中任意二顶点均不相邻，则称 V^* 为 G 的**点独立集**，或称**独立集**. 若 V^* 中再加入任何顶点都不再是独立集了，则称 V^* 为**极大独立集**. 顶点数最多的点独立集称为**最大点独立集**，其顶点个数称为**点独立数**，记作 $\beta_0(G)$，简记 β_0.

在图 13.1 所示的轮图 W_6 中，$\{v_0\}$，$\{v_1,v_4\}$，$\{v_1,v_3,v_5\}$ 等也都是极大独立集，其中 $\{v_1,v_3,v_5\}$ 是最大独立集，其独立数 $\beta_0=3$.

定理 13.2 设无向图 G 中无孤立顶点，V^* 为 G 中极大独立集，则 V^* 是 G 中极小支配集.

证明 先证 V^* 是支配集. 由于 V^* 是极大独立集，必有 $\forall v \in V(G)-V^*$，$\exists v' \in V^*$，使得 $(v,v') \in E(G)$，否则，$\exists v_0 \in V(G)-V^*$，$\forall u \in V^*$，均有 $(v_0,u) \notin E(G)$，则 $V^* \cup \{v_0\}$ 仍为独立集，这与 V^* 为极大独立集矛盾，所以 V^* 为支配集，由于 V^* 是独立集，所以任意的 $V_1^* \subset V^*$，$\forall v \in V^*-V_1^*$，$\neg \exists u \in V_1^*$，使得 $(v,u) \in E(G)$，因而 V^* 是极小支配集. ▌

定理 13.2 的逆不真. 例如若 4 阶图是长为 3 的路径 $v_1v_2v_3v_4$，$(v_1,v_4) \notin E(G)$，$\{v_2,v_3\}$ 是极小支配集，显然它不是独立集，更不是极大独立集. 当然，$\{v_1,v_4\}$，$\{v_1,v_3\}$，$\{v_2,v_4\}$ 都既是极小支配集，又是极大独立集.

定义 13.3 设无向图 $G=\langle V,E\rangle$，$V^* \subseteq V$，若对于任意的 $e \in E$，都存在 $v \in V^*$，使得 v 与 e 相关联，则称 v 覆盖 e，并称 V^* 为 G 中的**点覆盖集**，或简称**点覆盖**. 设 V^* 是点覆盖集，若 V^* 的任何真子集都不是点覆盖集，则称 V^* 为**极小点覆盖集**，顶点个数最少的点覆盖集称为**最小的点覆盖集**，其元素个数称为**点覆盖数**，记作 $\alpha_0(G)$ 或简记 α_0.

图 13.1 所示轮图 W_7 中，$\{v_0,v_1,v_3,v_5\}$，还有 $\{v_1,v_2,v_4,v_6\}$ 都是极小的也是最小的点覆盖集. $\alpha_0=4$.

从定义不难看出，连通图 G 中，点覆盖集必为支配集. 但极小点覆盖集不一定是极小支配集. 在图 13.1 中，$\{v_0,v_1,v_3,v_5\}$ 是极小(最小)点覆盖集，但它不是极小支配集. 另外，支配集不一定都是覆盖集，例如图 13.1 中，$\{v_1,v_4\}$ 是支配集，但它不是覆盖集.

定理 13.3 设无向图 $G=<V,E>$ 中无孤立点，$V^*\subset V$，则 V^* 为 G 的点覆盖集当且仅当 $\overline{V^*}=V-V^*$ 为 G 的点独立集.

证明 必要性. 若 $\exists v_i,v_j\in\overline{V^*}$，且 $(v_i,v_j)\in E$，而 $v_i,v_j\notin V^*$，这与 V^* 是点覆盖集相矛盾.

充分性. 由于 $\overline{V^*}=V-V^*$ 是点独立集，因而 $\forall e\in E$，e 的两个端点至少一个在 V^* 中，这说明 V^* 是点覆盖集. ▌

推论 设 G 是 n 阶无孤立点的无向图. V^* 是 G 的极小(最小)点覆盖集当且仅当 $\overline{V^*}=V(G)-V^*$ 为 G 的极大(最大)点独立集. 从而有

$$\alpha_0+\beta_0=n.$$

由定理 13.3，本推论的结论显然成立.

由定理 13.3 及其推论可知，若知道了图 G 的全部极大或最大点独立集，也就知道了 G 的全部的极小或最小点覆盖集，反之亦然. 在图 13.1 中，最大点独立集有两个：$\{v_1,v_3,v_5\}$，$\{v_2,v_4,v_6\}$，$\beta_0=3$，相应地，G 的最小点覆盖集也是两个：$\{v_0,v_2,v_4,v_6\}$ 和 $\{v_0,v_1,v_3,v_5\}$，$\alpha_0=4$.

定义 13.4 设 $G=<V,E>$ 为 n 阶无向图，$V^*\subseteq V$，若导出子图 $G[V^*]$ 是完全图，则称 V^* 为 G 中**团**. 设 V^* 为 G 中团，但 V^* 再加入任何顶点都不是团了，则称 V^* 为**极大团**. 顶点个数最多的团称为**最大团**，其顶点个数称为**团数**，记作 $\nu_0(G)$，简记作 ν_0.

在图 13.1 中，$\{v_0,v_1,v_2\}$，$\{v_0,v_2,v_3\}$ 等都是最大团，团数 $\nu_0=3$. 任何非平凡树的团数均为 2.

因为本章内讨论的图均为无向简单图，所以任何图 G 均有补

图 $\bar{G}$. 关于团与独立集有下面定理.

定理 13.4 设 G 是 n 阶无向图，V^* 为 G 中团当且仅当 V^* 为 $\bar{G}$ 中的独立集.

本定理的证明是简单的.

推论 设 G 是 n 阶无向图，V^* 为 G 中极大(最大)团当且仅当 V^* 为 $\bar{G}$ 中的极大(最大)独立集，从而 $\nu_0(G)=\beta_0(\bar{G})$.

由定理 13.4 及推论可知，研究图 G 中团及其性质，可以通过它的补图 $\bar{G}$ 中独立集来研究，反之亦然.

到目前为止，求图中的极小(最小)支配集、极大(最大)独立集和团以及极小(最小)点覆盖集还没有找到有效的算法，即多项式时间算法.

国际象棋盘上的“五后问题”[1]，“八后问题”[2]分别可以转换成最小支配集和最大独立集问题.

支配集、独立集和点覆盖集在各种通信系统、计算机网络以及信息论等方面都有很好的应用. 在理论计算机科学基础中提供了许多有效的研究实例.

【例 13.1】 求图 13.2 所示图的全体极小支配集、极小点覆盖集和极大独立集.

解 (1) 求极小支配集

由于 $\forall v \in V(G)$，v 可支配它的邻域 $N(v)$ 中的各顶点，可令布尔表达式

$$f(v_1,v_2,\cdots,v_n)=\prod_{i=1}^{n}\Big(v_i+\sum_{u\in N(v_i)}u\Big).$$

式中加与乘均为逻辑运算“加”与“乘”. 利用逻辑运算的规律性可求出 f 的极小积和式——最简析取范式，其中每个简单合取式对

---

[1] 在国际象棋棋盘上最少放5个皇后，可以使每个格均与某一皇后在同一行，或同一列，或同一对角线上，称为“**五后问题**”.

[2] 在国际象棋盘上最多放8个皇后，可以使每两个皇后都不同行，不同列，并且不同在一条对角线上，称为“**八后问题**”.

应一个极小支配集，在本例中

$f(a,b,c,d)=(a+b)(b+a+c+d)(c+b+d)(d+c+b)$

$=(a+b)(c+b+d)$ （吸收律）

$=ac+ad+b.$

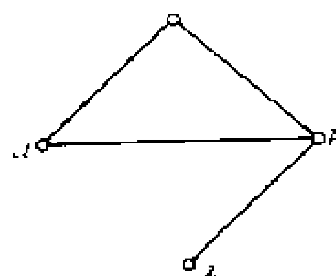


图 13.2

式中简单合取式 ac,ad,b 对应的极小支配集分别为 $\{a,c\}$、$\{a,d\}$、$\{b\}$，其中 $\{b\}$ 是最小支配集，所以 $\gamma_0=1$.

(2) 求极小点覆盖集

$\forall v\in V(G)$，v 可覆盖与它关联的一切边，而这些边的另一个端点的集合正是 v 的邻域 $N(v)$，于是可令布尔表达式

$$g(v_1,v_2,\cdots,v_n)=\prod_{i=1}^{n}\Big(v_i+\prod_{u\in N(v_i)}u\Big).$$

同样求 g 的极小积和式，每个简单合取式对应一个极小点覆盖集.

在本例中，

$g(a,b,c,d)=(a+b)(b+(acd))(c+(bd))(d+(bc))$

$=(a+b)(a+b)(b+c)(b+d)(b+c)(c+d)(b+d)(c+d)$ （分配律）

$=(a+b)(b+c)(b+d)(c+d)$ （等幂律）

$=bc+bd+acd.$

简单合取式 bc,bd,acd 分别对应极小点覆盖集 $\{b,c\}$、$\{b,d\}$、$\{a,c,d\}$，$\alpha_0=2$.

(3) 求极大点独立集

由定理13.3的推论可知，G 的极大独立集为 $\{a,d\}$、$\{a,c\}$、$\{b\}$，其中最大的为 $\{a,d\}$ 或 $\{a,c\}$，$\beta_0=2$.

由本例可以看出，用逻辑演算法求图中的极小支配集、极小覆盖集等，计算量太大，不是有效的算法.

§ 13.2　边覆盖集与匹配

定义 13.5　设无向图 $G=\langle V,E\rangle$，$E^*\subseteq E$，若对于任意的 $v\in V$，都存在 $e\in E^*$，使得 v 与 e 关联，则称 e 覆盖 v，并称 E^* 为**边覆盖集**. 设 E^* 是边覆盖集，若 E^* 的任何真子集都不是边覆盖集，则称 E^* 是**极小边覆盖集**. 边数最少的边覆盖集称为**最小边覆盖集**，所含边的个数称为**边覆盖数**，记作 $\alpha_1(G)$，简记 α_1.

显然最小边覆盖集为极小边覆盖集，但反之不真. 有时将边覆盖集简称为**边覆盖**.

在图 13.3 所示图 G 中，$\{e_3,e_{[illegible]},e_6\}$，$\{e_{[illegible]},e_1,e_7\}$，$\{e_2,e_5,e_{[illegible]}\}$ 等都是极小边覆盖，也是最小边覆盖，边覆盖数 $\alpha_1=3$.

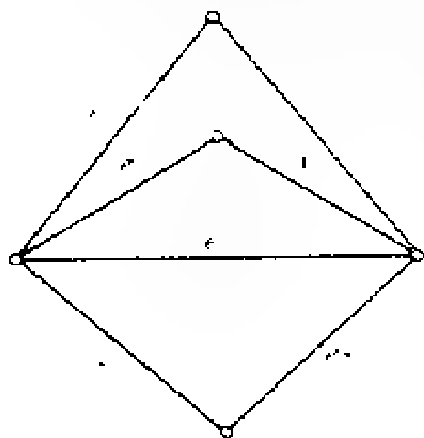


图　13.3

定义 13.6　设无向图 $G=\langle V,E\rangle$，$E^*\subseteq E$，若 E^* 中任何两条边均不相邻，则称 E^* 为 G 中**边独立集**，也称 E^* 为 G 中的**匹配**. 若在 E^* 中再添加任意一条边，所得集合都不是匹配了，则称 E^* 为**极大匹配**. 边数最多的匹配称为**最大匹配**，其边数称为**边独立数**或**匹配数**，记作 $\beta_1(G)$ 或简记为 β_1.

在图 13.3 所示图中，$\{e_1,e_7\}$，$\{e_1,e_{[illegible]}\}$，$\{e_2,e_6\}$ 等都是最大匹配，$\beta_1=2$.

设 M 为 G 中一个匹配，还有下面诸概念：

(1) 设 $e=(v,w)\in M$，则称 v 与 w 被 M 匹配.

(2) 任意的 $v\in V(G)$，若存在边 $e\in M$，使 e 与 v 关联，则称 v 为 M 的**饱和点**，否则称 v 为 M 的**非饱和点**.

(3) 若 G 中每个顶点都是 M 饱和点，则称 M 为**完美匹配**.

(4) 称 G 中在 M 和 $E(G)-M$ 中交替取边的路径为 M 的**交错路径**，起点与终点都是 M 非饱和点的交错路径称为**可增广的**

交错路径. 称 G 中在 M 中和 $(E(G)-M)$ 中交替取边的圈为**交错圈**.

在以上定义中,值得注意的是,当边 $e=(u,v)\notin M$ 且 u,v 均为 M 非饱和点时,e 的导出子图 $G[\{e\}]$ 是可增广的交错路径.

与支配集、独立集和点覆盖集不同,求图中的边覆盖集和匹配已经有了有效的算法,即多项式时间算法.

下面先讨论边覆盖与匹配之间的关系.

定理 13.5 设 G 为无孤立点的 n 阶无向图.

(1) 设 M 为 G 中一个最大匹配,对于每个 M 非饱和点 v,取一条关联 v 的边组成边集 N,则 $W=M\cup N$ 为 G 中一个最小边覆盖集.

(2) 设 W_1 为 G 中一个最小边覆盖集,若 W_1 中存在相邻的边就移去其中的一条边,继续这一过程,直到无相邻的边为止,设移去的边组成的集合为 N_1,则 $M_1=W_1-N_1$ 为 G 中一个最大匹配.

(3) $\alpha_1+\beta_1=n$.

证明 可以同时证明 3 个结论的成立.

由于 M 是最大匹配,所以 $|M|=\beta_1$,G 中含 $n-2\beta_1$ 个 M 非饱和点,所做出的 W 是 G 中边覆盖是显然的,且

$$|W|=|M|+|N|=\beta_1+n-2\beta_1=n-\beta_1. \quad (1)$$

由 W_1 是最小边覆盖可知,W_1 中任意一条边的两个端点不可能都与 W_1 中的其它边相关联,因而由 W_1 构造 M_1 时,每移去一条边就产生一个 M_1 的非饱和点,所以

$$\begin{aligned}|N_1|&=|W_1|-|M_1|=\text{“移去的边数”}\\&=\text{“}M_1\text{ 的非饱和点数”}\\&=n-2|M_1|\\&\Rightarrow |W_1|=\alpha_1=n-|M_1|. \quad (2)\end{aligned}$$

又因为 M_1 是匹配,W 是边覆盖,所以有

$$|M_1|\leqslant\beta_1, \quad (3)$$

$$|W|\geqslant\alpha_1, \quad (4)$$

由①～④可得

$$\alpha_1 \overset{②}{=} n - |M| \overset{③}{\geq} n - \beta_1 \overset{①}{=} |W_1| \overset{④}{\geq} \alpha_1, \qquad ⑤$$

由⑤可知

$$\alpha_1 = n - |M_1| = n - \beta_1 = |W_1|,$$

从而

$|M_1| = \beta_1$，可知 M_1 是最大匹配，

$|W_1| = \alpha_1$，可知 W_1 是最小边覆盖，

$\alpha_1 + \beta_1 = n$，从而(3)可证. ∎

推论 设 G 为 n 阶无孤立点的无向图，M 为 G 中的一个匹配，W 为 G 中一个边覆盖，则

$$|M| \leq |W|.$$

等号成立时，M 为 G 中完美匹配且 W 为 G 中的最小边覆盖.

证明 由定理 13.5(1)可知 $\beta_1 \leq \alpha_1$，于是

$$|M| \leq \beta_1 \leq \alpha_1 \leq |W|$$

$$\Rightarrow |M| \leq |W|.$$

当 $|M| = |W|$ 时，得

$$|M| = \beta_1 = \alpha_1 = |W|,$$

因而 M 是最大匹配，W 是最小边覆盖，由定理 13.5(3)可知，

$$\alpha_1 + \beta_1 = 2\beta_1 = n.$$

这说明 M 为完美匹配. ∎

定理 13.6 设 G 为无孤立点的 n 阶无向图，M 为 G 中一个匹配，N 为 G 中一个点覆盖，Y 为 G 中一个点独立集，W 为 G 中一个边覆盖，则

(1) $|M| \leq |N|$，

(2) $|Y| \leq |W|$，

等号成立时，M,N,Y,W 分别为 G 中最大匹配、最小点覆盖集、最大点独立集、最小边独立集.

证明 (1) 由于 M 中的边彼此均不相邻，因而覆盖住 M 中边

关联的所有顶点至少用$|M|$个顶点，所以$|M| \leq |N|$.

(2) 因为Y中顶点彼此不相邻，所以W中至少要用$|Y|$条边覆盖住Y中的所有顶点，因而$|Y| \leq |W|$.

当$|M| = |N|$时，说明$|M|$达到了最大，$|N|$达到了最小，因而M是最大匹配，N是最小点覆盖. $|Y| = |W|$时可类似讨论. ∎

推论 设G为无孤立顶点的n阶无向图，则

$$\beta_1 \leq \alpha_0, \quad \beta_0 \leq \alpha_1.$$

由定理13.6，本推论显然成立.

一般情况下等号不成立，而对完全二部图$K_{r,s}$来说，$\alpha_0 = \min\{r,s\} = \beta_1$，$\beta_0 = \max\{r,s\} = \alpha_1$.

定理13.7 设M_1, M_2为G中两个不同的匹配，则$G[M_1 \oplus M_2]$的每个连通分支或为由M_1, M_2中的边组成的交错圈，或为交错路径.

证明 因为$G[M_1]$，$G[M_2]$中顶点的度数均为1，因而$G[M_1 \oplus M_2]$中顶点的度数不是1就是2，于是各连通分支不是圈就是路径，而且边是交替出现的. ∎

定理13.8 设M为图G中的一个匹配，Γ为G中关于M的可增广路径，则$M' = M \oplus E(\Gamma)$仍为匹配，且$|M'| = |M| + 1$.

证明 M'是匹配是显然的. 由于在Γ上，非M中的边比M中的边多一条，所以

$$\begin{aligned}|M'| &= |M \oplus E(\Gamma)| \\ &= |(M - E(\Gamma)) \cup (E(\Gamma) - M)| \\ &= |M - E(\Gamma)| + |E(\Gamma) - M| \\ &= |M| + 1.\end{aligned}$$

下面定理由贝尔热(Berge)1957年给出.

定理13.9 M为G中最大匹配当且仅当G中不含M可增广路径.

证明 由定理13.8，本定理的必要性显然. 下面证明充分性. 设M是G中一个最大匹配，只要证明，当M是不含可增广路径

的匹配时，$|M|=|M_1|$即可，设 $H=G[M_1 \oplus M]$.

(1) 若 $H=\varnothing$，则 $M=M_1$，因而 M 是最大匹配.

(2) 若 $H\neq\varnothing$，由定理 13.7 可知，H 各连通分支或为交错圈，或为交错路径. 在交错圈上 M 和 M_1 中的边相等. 由本定理的必要性可知，M_1 也无可增广路径. 于是在交错路径上，M 与 M_1 中的边也相等，于是 $|M|=|M_1|$，即 M 也是最大匹配. ▮

定理 13.10 n 阶无向图 G 具有完美匹配当且仅当对于任意的 $V'\subset V(G)$，

$$p_{奇}(G-V') \leq |V'|, \tag{1}$$

其中 $p_{奇}(G-V')$ 表示 $G-V'$ 中奇数阶连通分支数.

本定理由托特给出.

证明 必要性. 设 M 为 G 中完美匹配，V' 为 $V(G)$ 的任意真子集. 若 $G-V'$ 无奇数阶连通分支，结论显然成立，否则，设 G_i 为 $G-V'$ 的奇数阶连通分支，并设 n_i(奇数)为 G_i 中 $V(G_i)$ 的顶点个数，$i=1,2,\cdots,r\ (r\geq 1)$. 由于 n_i 为奇数，在 M 中，必存在 $u_i\in V(G_i)$，$v_i\in V'$，使得 u_i 与 v_i 相匹配，见图 13.4 所示. 于是

$$p_{奇}(G-V')=r=|\{v_1,v_2,\cdots,v_r\}|\leq |V'|.$$

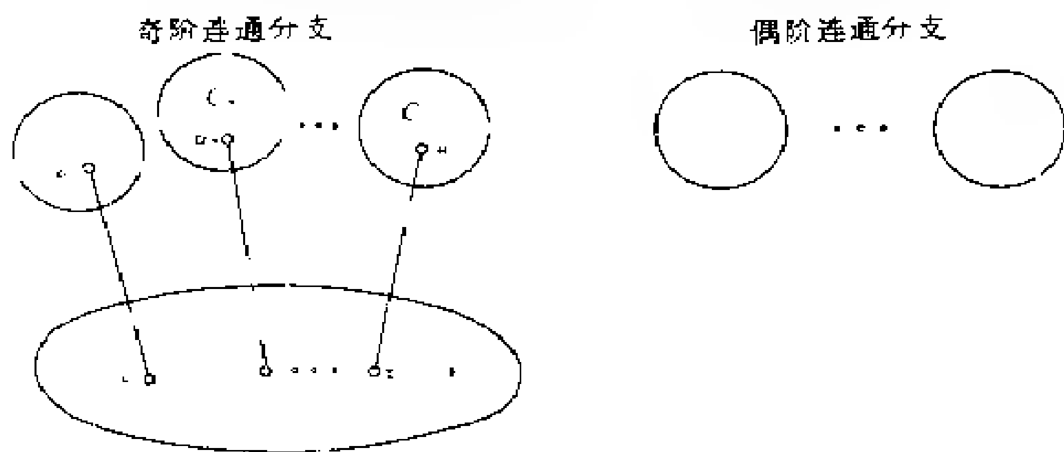


图 13.4

充分性. 假设 G 满足(1)但无完美匹配.

设 G^* 是含 G 作为生成子图的没有完美匹配的边数最多的图(当然 G^* 仍然是简单图),显然有 $p_{奇}(G^*-V')\leqslant p_{奇}(G-V')\leqslant |V'|$,于是

$$p_{奇}(G^*-V')\leqslant |V'|. \qquad (2)$$

特别地,取 $V'=\varnothing$,则 $p_{奇}(G^*-V')=0$,这正说明 $|V^*(G)|=|V(G)|=n$ 为偶数。

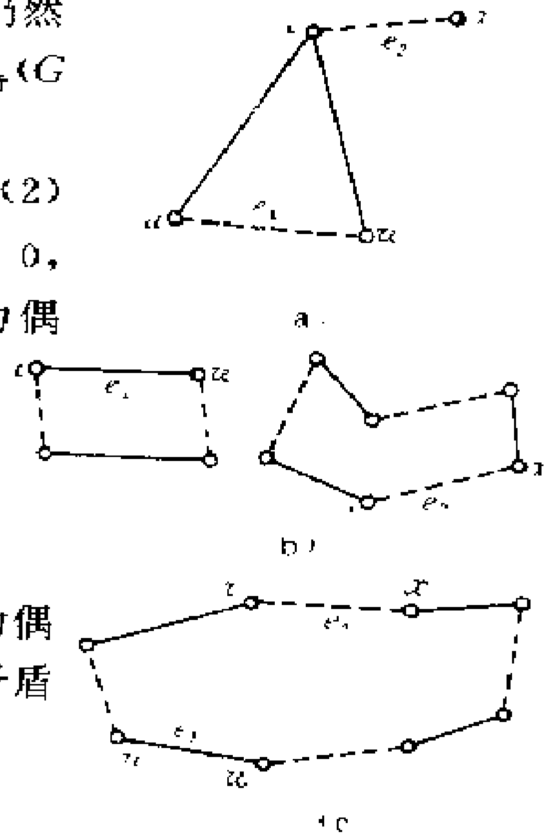


图 13.5

下面再取特殊的 V',令

$$V'=\{v\mid v\in V(G^*)且 d_{G^*}(v)=n-1\}.$$

此时 $V'\neq V(G)=V(G^*)$,否则 G^* 为偶数阶完全图,因而有完美匹配,这是矛盾的,所以 $V'\subset V(G^*)$.

下面分两步证明.

首先证明 G^*-V' 是不交完全图之并.

否则,设 G^*-V' 有连通分支 G_i 不是完全图.则存在 $u,v,w\in V(G_i)$,使得 $(u,v),(u,w)\in E(G^*)$,而 $(u,w)\notin E(G^*)$,见图 13.5 中(a)所示.又因为 $v\notin V'$,所以 $d_{G^*}(v)\leqslant n-2$,所以存在 $x\in V(G^*-V')$,使得 $(v,x)\notin E(G^*)$.由于 G^* 是无完美匹配边数最多的图,因而在 G^* 中任何不相邻的顶点之间再加一条边后,所得图应该有完美匹配.取 $e_1=(u,w)$,$e_2=(u,x)$,令 $G_1^*=G^*\cup e_1$,$G_2^*=G^*\cup e_2$,则 G_1^*,G_2^* 均有完美匹配,设 M_1,M_2 分别为 G_1^*,G_2^* 中的完美匹配,易知,$e_1\in M_1$,$e_2\in M_2$.在 $G^*\cup\{e_1,e_2\}$ 中令 $H=G[M_1\oplus M_2]$,$\forall v\in V(H)$,易知 $d_H(v)=2$,于是 H 只能是不交的偶交错圈之并.下面再分两种情况讨论.

e_1 与 e_2 在 H 的不同连通分支中,即在不同的不交的圈中,见图 13.5 中(b)示意图所示,实线边表示 M_1 中的边,虚线边表示

M_2 中的边，并设 e_2 在圈 C 上，则

$$M' = (E(C) \cap M_1) \cup ((E(G^*) - E(C)) \cap M_2)$$

不含 e_1 和 e_2，并且是 G^* 中的完美匹配，这与假设矛盾.

e_1 与 e_2 在 H 的同一个连通分支(交错圈)中，见图 13.5 中(c)示意图所示，设它们均在交错圈 C 中. 设 C 中含顶点 $v, x, \cdots, w$ 的一段为 P_{vw}，则

$$M'' = (E(P_{vw}) \cap M_1) \cup \{(v,w)\} \cup ((E(G^*) - E(P_{vw})) \cap M_2)$$

也不含 e_1 和 e_2，并且也是 G^* 中的完美匹配，这又是矛盾的.

综上所述可知 $G^* - V'$ 是不交的完全图的并.

下面证明 G^* 中有完美匹配.

由于 $G^* - V'$ 的偶数阶连通分支都是偶数阶完全图，因而都存在完美匹配. 又由(2)式可知，$G^* - V'$ 至多有 $|V'|$ 个奇数阶完全图的连通分支，在每个奇数阶连通分支中找一个顶点与 V' 中的某一顶点相匹配，V' 中其余的顶点个数为偶数，由 V' 的构造可知，这些顶点可在内部两两匹配，见图 13.6 示意图所示. 这样一来，G^* 中存在完美匹配，这是矛盾的. 于是 G 中有完美匹配. ∎

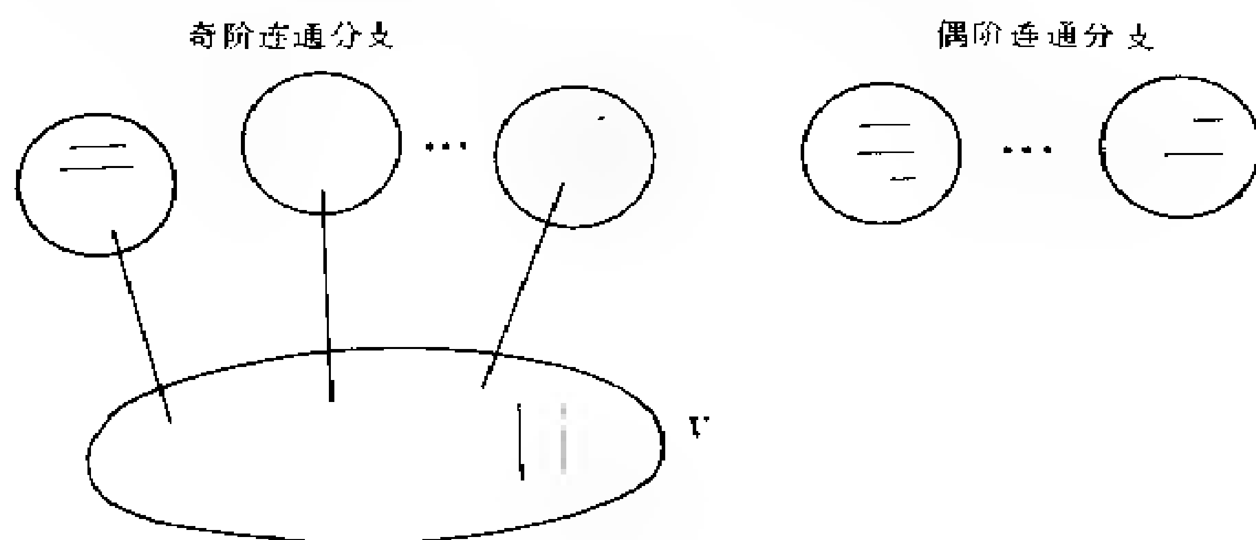


图 13.6

推论 任何无桥 3 正则图都有完美匹配.

证明 设 $G=<V,E>$ 为一个无桥的 3 正则图. V_1 为 V 的任意真子集. $G_1,G_2,\cdots,G_r$ 为 $G-V_1$ 的奇数阶连通分支, n_i 为 G_i 的顶点数,则 n_i 为奇数, m_i 为一个端点在 $V(G_i)$ 中,另一个端点在 V_1 中的边的条数, $i=1,2,\cdots,r$. 见图 13.7 示意图所示.

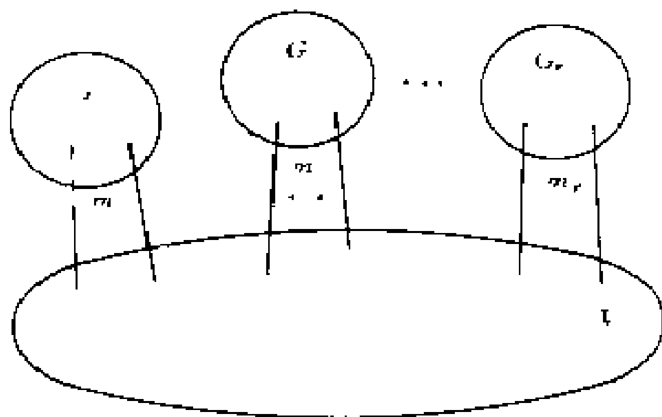


图 13.7

易知

$$\sum_{v\in V(G_i)} d_G(v) = 3n_i = 2|E(G_i)| + m_i,$$

从而,

$$m_i = 3n_i - 2|E(G_i)|.$$

由于 n_i 为奇数,所以 m_i 为奇数,且因 G 中无桥,所以 m_i 为大于等于 3 的奇数, $i=1,2,\cdots,r$.

又知

$$\sum_{v\in V_1} d_G(v) = 3|V_1|,$$

从而

$$|V_1| = \frac{1}{3}\sum_{v\in V_1} d_G(v).$$

于是

$$p_{奇}(G-V_1) = r \le \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{r} m_i$$

$$\le \frac{1}{3}\sum_{v\in V_1} d_G(v)$$

$$= |V_1|,$$

由定理 13.10 知 G 中存在完美匹配. ∎

定理中无桥的条件不能忽视. 见图 13.8 所示的有桥 3 正则

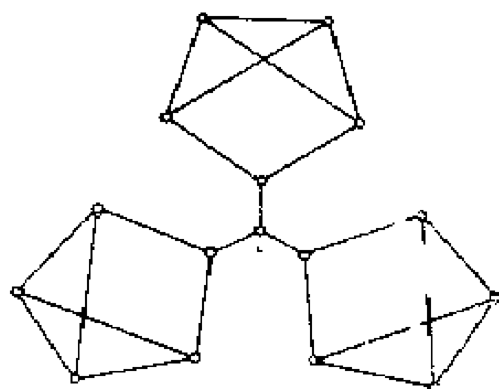


图 13.8

图. 取 $V_1=\{v\}$, 则

$$p_{奇}(G-V_1)=3>|V_1|=1.$$

所以 G 中无完美匹配.

§ 13.3 二部图中的匹配

定义 13.7 设 $G=\langle V_1,V_2,E\rangle$ 为二部图, $|V_1|\leq|V_2|$, M 为 G 中一个最大匹配并且 $|M|=|V_1|$, 则称 M 为 G 中的从 V_1 到 V_2 的**完备匹配**, 简称完备匹配.

很显然, 在以上的定义中, 若 $|V_1|=|V_2|$, 则 G 中的完备匹配就是完美匹配.

1935 年霍尔(Hall)给出了二部图中存在完备匹配的充要条件, 这就是著名的霍尔定理.

定理 13.11(Hall 定理) 设二部图 $G=\langle V_1,V_2,E\rangle$, $|V_1|\leq|V_2|$. G 中存在 V_1 到 V_2 的完备匹配当且仅当对于任意的 $S\subseteq V_1$, 均有 $|S|\leq|N(S)|$, 其中 $N(S)$ 为 S 的邻域, 即 $N(S)=\bigcup_{v_i\in S}N(v_i)$.

本定理也称为婚姻定理, 定理中的条件称为**相导性条件**.

证明 必要性显然. 下面证明充分性.

设 M 为 G 中一个最大匹配. 下面证明 M 是 V_1 到 V_2 的完备匹配. 否则, 必存在 $v_x\in V_1$ 为 M 的非饱和点, 且必存在边 $e\in E_1=E-M$ 与 v_x 关联, 否则 v_x 将是孤立点, 这与已知条件相矛盾. 且 $N(v_x)$ 中顶点均为 M 饱和点. 否则, 若存在 $v_y\in N(v_x)$, 且 v_y 也是 M 非饱和点, 令 $M'=M\cup\{(v_x,v_y)\}$, 则 M' 是 G 中的匹配且比 M 多一条边, 这与 M 是最大匹配相矛盾.

考虑从 v_x 出发的尽可能长的所有交错路径, 由定理 13.9 可知, 这些交错路径都不是可增广的, 即每条路径均以 M 的饱和点结束. 令

$S=\{v\mid v\in V_1$ 且 v 在 v_x 出发的交错路径上$\}$,

$T=\{v\mid v\in V_2$ 且 v 在 v_x 出发的交错路径上$\}$.

由于各路径的始点与终点均在 S 中, 所以, $|S|=|T|+1$. 可是 $T=N(S)$, 于是 $|N(S)|<|S|$, 这矛盾于相异性条件, 故 V_1 中不存在 M 非饱和点, 因而 M 是 G 中的完备匹配. ∎

定理 13.12 设 $G=\langle V_1,V_2,E\rangle$ 为二部图, 若 V_1 中每个顶点至少关联 $t(t\geq 1)$ 条边, 而 V_2 中每个顶点至多关联 t 条边, 则 G 中存在 V_1 到 V_2 的完备匹配.

证明 由定理中的条件可知, V_1 中任意 $k(1\leq k\leq |V_1|)$ 个顶点至少关联 kt 条边, 这 kt 条边至少关联 V_2 中 k 个顶点, 这说明 G 满足相异性条件, 因而存在 V_1 到 V_2 的完备匹配. ∎

本定理中的条件也称为 $t(t\geq 1)$ 条件. 当然, 满足相异性条件不一定满足 t 条件.

在图 13.9 所示的二部图中, (a)满足 $t=3$ 的 t 条件, (a), (b)都满足相异性条件, 而(c)不满足相异性条件. (a), (b)中存在完备匹配, 当然(c)中不存在完备匹配.

定理 13.13 设 $G=\langle V_1,V_2,E\rangle$ 为 k 正则二部图, 则 G 中存在 k 个边不重的完美匹配.

证明 由于 G 是 k 正则二部图, 所以满足 $t=k$ 的 t 条件, 由

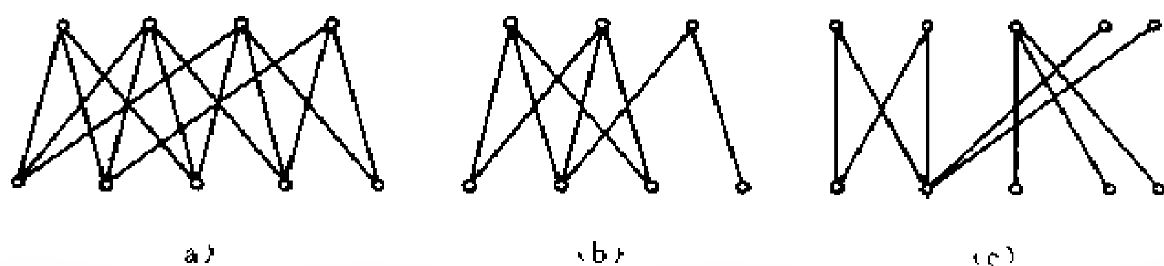


图 13.9

定理 13.11 可知，G 中存在 V_1 到 V_2 的完备匹配，又易知 $|V_1|=|V_2|$，所以 G 中的完备匹配都是完美匹配.

下面用归纳法证明 G 中存在 k 个边不重的完美匹配.

当 $k=1$ 时，G 中存在一个完美匹配. 设当 G 是 k 正则二部图时，G 中存在 k 个边不重的完美匹配. 设 G 是 $(k+1)$ 正则二部图，M 为 G 中一个完美匹配，令 $G'=G-M$，则 G' 是 k 正则二部图，由假设知道 G' 中存在 k 个边不重的完美匹配，于是 G 中存在 $k+1$ 个边不重的完美匹配. ∎

推论 $K_{k,k}$ 中存在 k 个边不重的完美匹配.

定理 13.14 设 $G=\langle V_1,V_2,E\rangle$ 为无孤立点的二部图，则 $\alpha_0=\beta_1$.

证明 设 M 为 G 中最大匹配，则 $|M|=\beta_1$. 令

$$X=\{v\mid v\in V_1 且 v 为 M 的非饱和点\}.$$

则 V_1-X 为 M 的全体饱和点集(因为 G 中无孤立点). 再令

$$Y=\{v\mid v 在以 X 中顶点为起点尽量长的交错路径上\},$$

及

$$S=Y\cap V_1,\quad T=Y\cap V_2.$$

由于 M 是最大匹配(无可增广交错路径)，所以 T 中顶点均为 M 饱和点且 $N(S)=T$，见示意图图 13.10. 取

$$N=(V_1-S)\cup T,$$

则 G 中任意一条边的两个端至少有一个在 N 中，所以 N 是 G 的

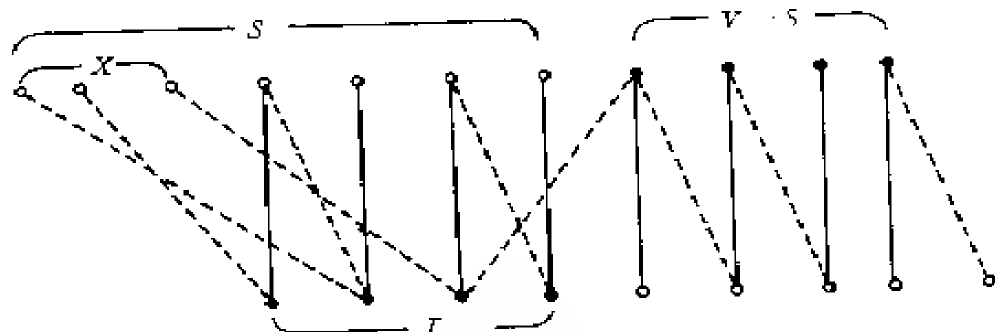


图 13.10

点覆盖集. 又由 N 的构造可知, $T\subset V_2$, $V_1-S\subset V_1$, 所以 $(V_1-S)\cap T=\varnothing$, 又 V_1-S 与 T 中元素均为 M 饱和点, 所以

$$|N|=|(V_1-S)\cup T|=|V_1-S|+|T|=|M|,$$

由定理 13.6 知, N 为最小点覆盖, 所以 $|N|=\alpha_0$, 从而有 $\alpha_0=|N|=|M|=\beta_1$. ▌

习 题 十 三

本习题中的图均为无向简单图.

1. 无向图 G 为图 13.11 所示. 求

(1) G 中所有极小支配集及支配数 γ_0;

(2) G 中所有极小点覆盖集及点覆盖数 α_0;

(3) G 中所有极大点独立集及点独立数 β_0;

(4) G 中所有极大匹配及匹配数 β_1;

(5) G 中所有极小边覆盖及边覆盖数 α_1.

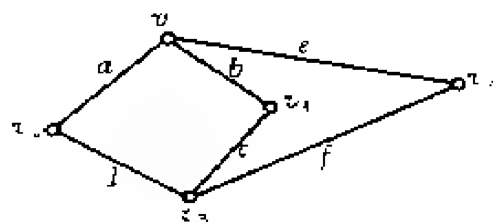


图 13.11

2. 证明: 完全图 $K_{2k}(k\geq 1)$ 中存在 $(2k-1)$ 个边不重的完美匹配.

3. 证明：对于任意无向图 G，有 $\alpha_0(G)\geqslant\delta(G)$.

4. 证明：在 8×8 的国际象棋棋盘的一条主对角线上移去两端 1×1 的方格后，所得棋盘不能用 1×2 的长方形恰好填满.

5. 两个人在无向图 G 上做游戏，方法是交替地选择不同的顶点 $v_0,v_1,v_2,\cdots$，使得对于每个 $i>0$，v_i 相邻于 v_{i-1}，最后一个取点者得胜（不一定选完 G 中所有顶点，选到不能选择为止）. 证明：第一个人有得胜策略当且仅当 G 中无完美匹配.

6. 设二部图 $G=\langle V_1,V_2,E\rangle$ 满足相异性条件，且 $\forall v\in V_1$，$|N(v)|\geqslant t$，又已知 $|V_1|=r$，证明：

(1) 若 $t\leqslant r$，则至少存在 $t!$ 个 V_1 到 V_2 的完备匹配.

(2) 若 $t>r$，则至少存在 $t!/(t-r)!$ 个 V_1 到 V_2 的完备匹配.

7. 一次舞会，共有 n 个小伙子和 n 个姑娘参加，已知每个小伙子至少认识两个姑娘，而每个姑娘至多认识两个小伙子. 问能否将他们分成 n 对舞伴，使得每对中的姑娘与小伙子相互认识？

8. 现有 3 个课外小组：物理组、化学组和生物组. 今有张、王、李、赵、陈 5 名同学，已知：

(1) 张、王为物理组成员，张、李、赵为化学组成员，李、赵、陈为生物组成员.

(2) 张为物理组成员，王、李、赵为化学组成员，王、李、赵、陈为生物组成员.

(3) 张为物理组和化学组成员，王、李、赵、陈为生物组成员.

问在(1)，(2)，(3)三种情况下能否各选出 3 名不兼职的组长？为什么？若能选出，各有多少种不同的选择方案？

第十四章　带权图及其应用

给定图 $G=<V,E>$（G 为无向图或为有向图），设 $W:E\to R$（R 为实数集），任意的边 $e=(v_i,v_j)$（G 为有向图时，$e=<v_i,v_j>$），设 $W(e)=w_{ij}$，称 w_{ij} 为边 e 上的权，并将 w_{ij} 标注在边 e 上，称 G 为**带权图**，此时常将 G 记为 $<V,E,W>$. 设 $G'\subseteq G$，称 $\sum_{e\in E(G')} W(e)$ 为 G' 的权，记为 $W(G')$.

§14.1　最短路径问题

在非带权图中，曾经定义过图中任意两个顶点之间的短程线或距离的概念. 在带权图中，应该在子图的权的意义下，定义两个顶点之间的最短通路的概念.

设 $G=<V,E,W>$ 为 n 阶带权图，G 中各边带的权均为非负实数，u,v 为 G 中任意二顶点，若 u 与 v 连通（对于有向图来说，若 u 可达 v），$P_0(u,v)$（简记为 P_0）为 u 到 v 的一条通路，若满足

$$W(P_0)=\min_{P\in\mathscr{P}(u,v)}\{W(P)\}$$

则称 $P_0(u,v)$ 为 u 与 v 之间的最短路，其中 $\mathscr{P}(u,v)$ 为 u,v 之间全体通路集合. 并将 $W(P_0)$ 称为 u,v 之间最短路的权. 当 G 各边带权全为 1 时，P_0 为 u,v 之间的短程线，$W(P_0)$ 为 u,v 之间的距离.

由以上定义不难看出以下两点：

(1) 由于各边所带权均大于等于 0，所以两个顶点之间的最短路若存在一定是路径，因而最短路常称为最短路径.

(2) 若 $uv_{i_1}v_{i_2}\cdots v_{i_k}v$ 为 u 到 v 的最短路径，则 $uv_{i_1}v_{i_2}\cdots v_{i_r}$（$1\leqslant r\leqslant k$）为 u 到 v_{i_r} 的最短路径.

若顶点 u 与 v 不连通(对于有向图来说 u 不可达 v),则 u 到 v 无通路,因而也就无最短路,可以规定 u 到 v 的最短路的权为∞.

基于以上定义和讨论,著名计算机学家 E. W Dijkstra 于 1959 年给出了求最短路径的算法,称为 Dijkstra 标号法,或简称为标号法.

在给出标号法的算法之前,先给出下面有关的概念及记法.

(1) 记 $l_i^{(r)}$ 为算法第 r 步得到的 v_1 到 v_i 的最短路径权的一个上界,记在 v_i 处,称在第 r 步 v_i 所获得的**临时性标号**,简称为 t 标号.

(2) 记 $l_i^{(r)*}$ 为第 r 步得到的 v_1 到 v_i 的最短路径的权,记在 v_i 处代替 $l_i^{(r)}$,称 v_i 在第 r 步获得**永久性标号**,简称为 p 标号.

(3) 记 $P_r=\{v|v$ 在前 r 步或 r 步获 p 标号$\}$,称 P_r 为第 r 步通过集.

(4) 记 $T_r=V(G)-P_r$,称 T_r 为第 r 步的未通过集.

下面介绍用标号法求 G 中指定顶点到其余各顶点的最短路径. 设 $V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$,不妨设指定顶点为 v_1.

求 v_1 到 v_i $(2\leqslant i\leqslant n)$的最短路径的算法:

开始 $r\leftarrow 0$, v_1 获 p 标号: $l_1^{(0)*}=0$, $v_j(j\neq 1)$的 t 标号为 $l_j^{(0)}=w_{1j}$(若 v_1 与 v_j 不相邻,则 $w_{1j}=\infty$), $P_0=\{v_1\}$, $T_0=V-\{v_1\}$.

1 求下一个 p 标号顶点:

$$l_i^{(r)*}=\min_{v_j\in T_{r-1}}\{l_j^{(r-1)}\},\quad r\geqslant 1$$

将 $l_i^{(r)*}$ 标注在所对应的顶点 v_i 处,表明 v_i 在第 r 步获 p 标号,同时修改通过集与未通过集:

$$P_r=P_{r-1}\cup\{v_i\},\quad T_r=T_{r-1}-\{v_i\},$$

若 $T_r=\varnothing$,则算法结束,否则转(2).

2 修改 T_r 中各顶点的 t 标号:

$$l_j^{(r)}=\min\{l_j^{(r-1)},l_i^{(r)*}+w_{ij}\}.$$

$r\leftarrow r+1$,转 1

对算法的几点说明：

(1) 由于我们讨论的图都是有限图，因而经过 n(n 为 G 的阶数)步后，G 中所有顶点都进入通过集，即 T_{n-1} 必为空，因而算法一定结束.

(2) 若顶点 v_i 在第 $r(0\leqslant r<n-1)$ 步获得的 p 标号 $l_i^{(r)*}$ 为有限值，则说明 v_1 到 v_i 的最短路存在，且其权为 $l_i^{(r)*}$.

(3) 若顶点 v_i 在第 $r(0<r\leqslant n-1)$ 步获得的 p 标号 $l_i^{(r)*}$ 为 ∞，则说明 v_1 到 v_i 的最短路不存在.

由图中各边所带权的非负性，$l_i^{(r)*}$ 是 v_1 到 v_i 的最短路径的权是显然的. 算法的复杂度为 $O(n^2)$.

【例 14.1】 无向带权图如图 14.1 所示. 用 Dijkstra 算法求 v_1 到各顶点的最短路及相应的权.

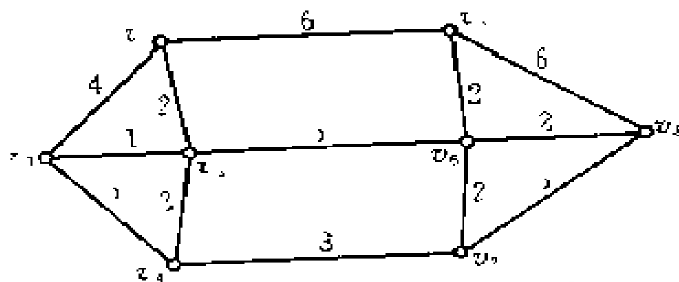


图 14.1

解 若用 $\boxed{l_i^{(r)*}}/v_j$ 表示在第 r 步 v_i 获 p 标号 $l_i^{(r)*}$，且在 v_1 到 v_i 的最短路上，v_i 的前驱是 v_j，则算法可用一张表给出. 第 0 行是算法的开始，v_1 获永久性标号 p $\boxed{l_1^{0*}}$. 然后，每一行都是将上一行的最小值之一标成 p 标号，并修改其它顶点的 t 标号，本例算法对应的表为表 14.1 所示.

表 14.1

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
0	[0]	4	1	5	∞	∞	∞	∞
1		3	[1]/v_1	3	∞	6	∞	∞
2		[3]/v_3		3	9	6	∞	∞
3				[3]/v_3	9	6	6	∞
4					8	[6]/v_3	6	8
5					8		[6]/v_4	8
6					[8]/v_6			8
7								[8]/v_6
	0	3	1	3	8	6	6	8

由表 14.1 可以看出：

v_1 到 v_2 的最短路为 $v_1v_3v_2$，其权为 3；

v_1 到 v_3 的最短路为 v_1v_3，其权为 1；

v_1 到 v_4 的最短路为 $v_1v_3v_4$，其权为 3；

v_1 到 v_5 的最短路为 $v_1v_3v_6v_5$，其权为 8；

v_1 到 v_6 的最短路为 $v_1v_3v_6$，其权为 6；

v_1 到 v_7 的最短路为 $v_1v_3v_4v_7$，其权为 6；

v_1 到 v_8 的最短路为 $v_1v_3v_6v_8$，其权为 8.

v_1 到各顶点的最短路构成了图中的一棵生成树，见图 14.2 中实边所示子图.

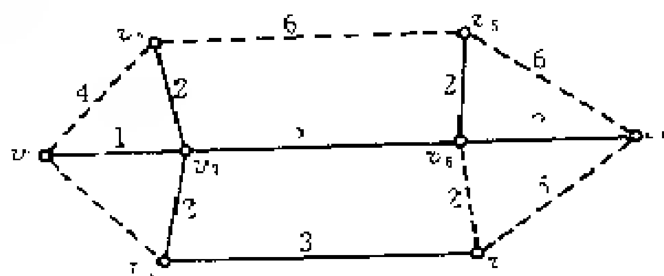


图 14.2

【例 14.2】 有向带权图如图 14.3 所示. 用 Dijkstra 标号法求 v_1 到其余各顶点的最短路及其权.

解　计算结果为表 14.2 所示.

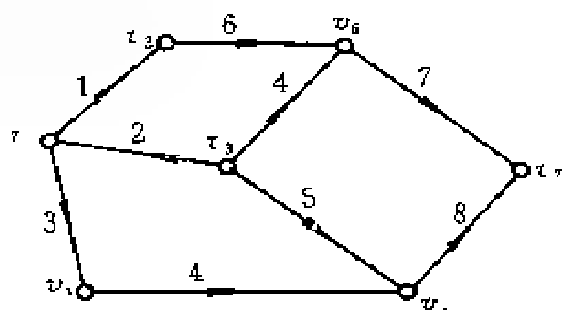


图　14.3

表　14.2

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
0	$\boxed{0}$	1	∞	3	∞	∞	∞
1		$\boxed{1}/v_1$	∞	3	∞	∞	∞
2			∞	$\boxed{3}/v_1$	7	7	[illegible]
3			∞		$\boxed{7}/v_4$	7	15
4						$\boxed{7}/v_2$	14
5			∞				$\boxed{14}/$[illegible]
6			$\boxed{\infty}$				
	0	1	∞	3	7	7	14

由表 14.2 可以看出

v_1 到 v_2 的最短路为 [illegible]，其权为 1；

v_1 到 v_3 不可达，无最短路；

v_1 到 v_4 的最短路为 v_1v_4，其权为 3；

v_1 到 v_5 的最短路为 $v_1v_4v_5$，其权为 7；

v_1 到 v_6 的最短路为 v_1v_2[illegible]，其权为 7；

v_1 到 v_7 的最短路为 v_1[illegible]，其权为 14；

用 Dijkstra 标号法求 G 中 v_1 到 v_k 的最短路只需将以上算法中 $T_i=\varnothing$，则算法结束，改为若 v_k 属于通过集，则算结束，其它部

分不变.

§14.2 关键路径问题

PERT(Program Evaluation and Review Technique)是计划评审技术的代号,计划评审技术诞生于1956年,是运筹学中的典型问题之一,在运筹学中计划评审技术又称为统筹方法或网络计划技术.计划评审技术是编制大型工程进度计划和生产计划的有效方法.

定义 14.1 设 D 是 n 阶有向简单带权图,若满足:

(1) D 中无回路,

(2) D 中有一个顶点的入度为0,记为 v_1,称 v_1 为**发点**,有一个顶点的出度为0,记为 v_n,称 v_n 为**收点**.

(3) 任意的 $v\in V-\{v_1,v_n\}$,则 v 在某条从 v_1 到 v_n 的路径上,

则称 D 是PERT图.

在PERT图中,每条边表示一道工序或一种活动,若有向边 $<v_i,v_j>$,$<v_j,v_k>$ 相邻,则表示工序 $<v_j,v_k>$ 必须在 $<v_i,v_j>$ 结束后才能开始. $\forall v\in V$,v 表示一种状态,它表示关联到它的工序都结束之后,关联于它的工序才能开始,发点 v_1 表示整个工程的开始,收点 v_n 表示整个工程的结束.图中各边上的权表示完成相应工序所需要的时间,因而各边上的权均大于等于零.

定义 14.2 在PERT图中的关键路径是从发点 v_1 到收点 v_n 的最长(按权计算)的路径.处于关键路径上的顶点称为**关键状态**,处在关键路径上的边称为**关键工序**或**关键活动**.

由PERT图的定义可知,任何PERT图中的关键路径是存在的,但可以不只一条.要想使整个工程的工期缩短,必须将每条关键路径上的至少一条边的权缩小.

如何求出PERT图中的关键路径呢?可以通过求图中各顶点的最早完成时间、最晚完成时间和缓冲时间来求关键路径.

定义 14.3 设 PERT 图为有向图 D，任意的 $v_i\in V(D)$，称从发点 v_1 沿最长的路径到达 v_i 所需要的时间为 v_i 的**最早完成时间**，记作 $TE(v_i)$.

从定义不难看出，$TE(v_i)$是以 v_i 为起点的各工序的最早可能开工时间，因而称为 v_i 的最早完成时间，它是 v_1 到 v_i 的最长路径的权. 显然，v_1 的最早完成时间为 0，即 $TE(v_1)=0$，而 v_n 的最早完成时间，即为关键路径的长度(权). 最早完成时间的计算公式如下：

$$\begin{cases} TE(v_1)=0, \\ TE(v_i)=\max\limits_{v_j\in\Gamma^-(v_i)}\{TE(v_j)+w_{ji}\}, i\neq 1. \end{cases} \tag{1}$$

其中，$\Gamma^-(v_i)$为 v_i 的先驱元集，w_{ji}为边$\langle v_j,v_i\rangle$的权.

定理 14.1 设 $P_E=\{v|TE(v)$已算出$\}$，$T_E=V-P_E$，若 $T_E\neq\varnothing$，则存在 $u\in T_E$，使得 $\Gamma^-(u)\subset P_E$.

本定理的证明留作习题.

由定理 14.1 可知，可以求出 D 中各顶点的最早完成时间，直至 $TE(v_n)$.

定义 14.4 在保证收点 v_n 的最早完成时间 $TE(v_n)$不增加的条件下，自 v_1 最迟到达 v_i 所需要的时间，称为 v_i 的**最晚完成时间**，记作 $TL(v_i)$.

其实，$TL(v_i)$为 $TE(v_n)$与 v_i 沿最长(按权计算)路径到达 v_n 所需时间之差，$TL(v_i)$是关联于 v_i 的各道工序所允许的最迟的开工时间，其计算公式为

$$\begin{cases} TL(v_n)=TE(v_n) \\ TL(v_i)=\min\limits_{v_j\in\Gamma^+(v_i)}\{TL(v_j)-w_{ij}\}, i\neq n. \end{cases}$$

其中，$\Gamma^+(v_i)$为 v_i 的后继元集，w_{ij} 为边$\langle v_i,v_j\rangle$的权.

定理 14.2 设 $P_L=\{v|TL(v)$已算出$\}$，$T_L=V-P_L$，若 $T_L\neq\varnothing$，则存在 $u\in T_L$，使得 $\Gamma^+(u)\subset P_L$.

由定理 14.2 可知，各顶点的最晚完成时间都可以算出.

定义 14.5 称 $TL(v_i)-TE(v_i)$ 为 v_i 的**缓冲时间或松弛时间**，记为 $TS(v_i)$.

容易看出，$TS(v_i)\geqslant 0, i=1,2,\cdots,n$.

定理 14.3 $TS(v_i)=0$ 当且仅当 v_i 处在关键路径上.

定理 14.3 的证明是简单的.

由定理 14.3 可求出关键路径，由 $TE(v_n)$ 可知关键路径的权（长度）.

【例 14.3】 求图 14.4 所示 PERT 图中各顶点的最早、最晚及缓冲时间，并求出所有关键路径.

解 表 14.3 给出了各顶点的最早、最晚及缓冲时间. 图 14.5 中实边所示子图为关键路径，它的权（长度）为 $TE(v_{12})=22$.

关键路径只有一条：$v_1v_3v_6v_8v_{10}v_{12}$，其长度（权）为 22.

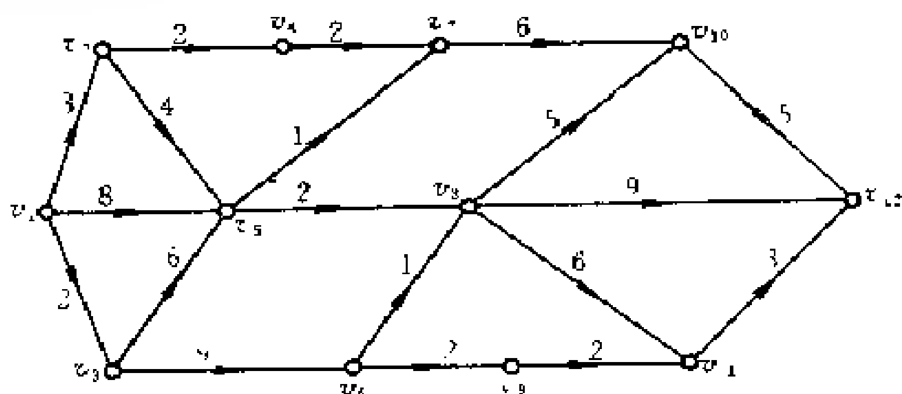


图 14.4

表 14.3

v_i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v	v	v_{12}
$TE(v_i)$	0	3	2	5	8	11	9	12	13	17	18	22
$TL(v_i)$	0	6	2	9	10	11	11	12	17	17	19	22
$TS(v_i)$	0	3	0	4	2	0	2	0	4	0	1	0

求 PERT 图中关键路径，即计算各顶点的最早、最晚及缓冲时间的复杂度为 $O(m)$，其中 m 为图中边数.

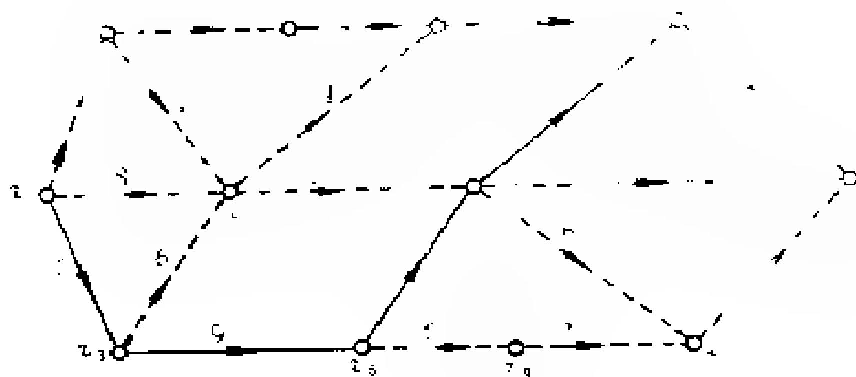


图 14 5

§14.3 中国邮递员问题

一个邮递员从邮局出发投递信件，他必须在他所管辖范围内的所有街道至少走一次，最后回到邮局，他自然希望选择一条最短的路线完成投递任务，那末如何选择这样的路线呢？这个问题是中国数学家管梅谷先生首先提出的，因而被称作中国邮递员问题，也可以简称为邮递员问题.

要解邮递员问题，首先应将该问题用图来描述. 构造无向带权图 $G=\langle V,E,W\rangle$，E 为街道集合，V 中元素为街道的交叉点. 街道的长度为该街道对应的边的权，显然所有权均大于 0. 邮递员问题就变成了求 G 中一条经过每条边至少一次的回路，使该回路所带权最小的问题. 并且称满足以上条件的回路是**最优投递路线**或**最优回路**.

显然，若 G 是欧拉图，则最优投递路线为 G 中的任意一条欧拉回路. 若 G 不是欧拉图，则最优投递路线必须要有重复边出现，而要求重复边权之和达到最小，具体说来是这样的. 若 G 不是欧拉图，则 G 必有奇度顶点，当然设 G 是连通图，为了消去奇度顶点，必须加若干条重复边，使重复边的边与原边的权相同，设所得图为 G^*，于是求 G 的最优投递路线就等价于求 G^* 的一条欧拉回

……重复……权之和 $\sum_{e\in F} w(e)$ 最小，其中 $F=E(G^*)-E(G)$.

……条最优投递路线，G^* 为对应的欧拉图，G^* 中的……满足什么条件呢？请见下面定理.

定理 14.4 C 是带正权无向连通图 $G=<V,E,W>$ 中的最优投递路线当且仅当对应的欧拉图 G^* 应满足：

(1) G 的每条边在 G^* 中至多重复出现一次；

(2) G 的每个圈上在 G^* 中重复出现的边的权之和不超过该圈权的一半.

证明 必要性. 首先证明(1).

设 C 是最优投递路线，即 C 是 G^* 中的欧拉回路，满足 $\sum_{e\in F} w(e)$ 最小，$F=E(G^*)-E(G)$. 设 G 中边 e 在 G^* 中的重复度为 $m(e)$，即在 G 中的 e 的两个端点 u,v 之间添加了 $m(e)-1$ 条重复边. 若 $m(e)\geqslant 3$，在 G^* 中 u,v 之间的边中随便删除两条，不改变 u,v 度数的奇偶性，因而所得图 G^{**} 仍为欧拉图，由于 G 中各边的权均为正的，因而 $W(F_2)<W(F_1)$，其中 $F_2=E(G^{**})-E(G)$，而 $F_1=E(G^*)-E(G)$，这与 C 是最优投递路线矛盾.

下面证明(2)成立.

设 C_1 是 G 中一个圈，并且在 G^* 中，C_1 上重复出现的边的权之和大于 C_1 权的一半，见图 14.6(a)所示，将 C_1 上重复出现的边

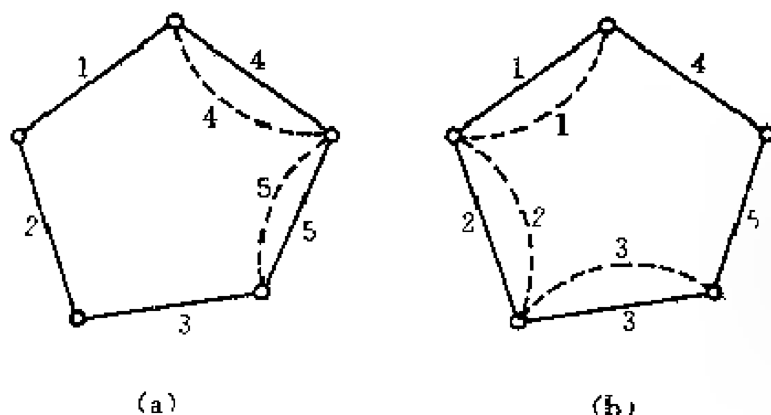


图 14.6

都去掉，而没有重复出现的边各加一条重复边，这样做不改变 G^* 中 C_1 上各顶点度数的奇偶性，见图 14.6(b)所示，设所得图为 G^{**}，G^{**} 仍为欧拉图，可是 $W(G^{**})<W(G^*)$，这与 C 是最优投递路线又是矛盾的，因而(2)成立.

充分性. 其实，只要证明满足(1)，(2)两个条件的最优投递路线的权相等，也就是，只要证明满足(1)，(2)两个条件的最优投递路线对应欧拉图的重复边的权和相等.

设 C_1 和 C_2 是满足(1)，(2)两个条件的不同的投递路线，它们对应的欧拉图分别为 G_1^* 和 G_2^*，F_1，F_2 分别为 G_1^* 和 G_2^* 的重复边集合. 又设 $F=F_1\oplus F_2$，$G[F]$ 为 $G_1^*\cup G_2^*$ 中 F 的导出子图. 由于在 G_1^* 和 G_2^* 中，过某顶点 v 的添加条数的奇偶性与 v 在 G 中的度数，即 $d_G(v)$ 的奇偶性相同，因而 $G[F]$ 中各顶点的度数均为偶数. 于是 $G[F]$ 各连通分支均为欧拉图. 从而 $G[F]$ 是若干个边不重的圈的并. 而 $G[F]$ 中各圈均既有 F_1 中的边又有 F_2 中的边. 设 C' 为 $G[F]$ 中一个圈，由(2)可知，C' 上 F_1 中边的权之和与 F_2 中边的权之和均小于等于 $\frac{1}{2}W(C')$，于是 F_1，F_2 在 C' 中边的权和必相等，都等于 $\frac{1}{2}W(C')$，由 C' 的任意性及 F 的构造可知 $W(G_1^*)=W(G_2^*)$，即 $W(C_1)=W(C_2)$，这就证明了充分性. ▌

由定理 14.4 可知，为了求带正权无向连通图 G 中的最优投递路线，若 G 不是欧拉图，G 中必有奇度顶点，给 G 的某些边加重复边使其成为欧拉图并且满足定理中的条件(1)，再检验所有圈中添加重复边的权之和是否满足条件(2)，若不满足，则按定理证明中的办法进行调整，设最后得到的欧拉图为 G^* 满足定理中的条件，在 G^* 从任何顶点出发走出的欧拉回路都是最优投递路线. 不过这种方法的计算量太大.

由定理 14.4 不难证明下面定理.

定理 14.5 设带正权无向连通图 $G=\langle V,E,W\rangle$，V' 为 G 中奇度顶点集，设 $|V'|=2k(k\geq 0)$，$F=\{e|e\in E\wedge$ 在求 G 的最优

回路时加了重复边，则F的导出子图$G[F]$可以表示为以V'中顶点为起点与终点的k条不交的最短路径之并.

基于定理14.5，J. Edmonds和E. L. Johnson于70年代给出了求解邮递员问题的有效算法，其算法的复杂度为$O(n^3)$，其中n为G中顶点数.

算法步骤如下：

1　若G中无奇度顶点，令$G^*=G$，转**2**，否则转**3**.

2　求G^*中的欧拉回路，结束.

3　求G中所有奇度顶点对之间的最短路径.

4　以G中奇度顶点集V'为顶点集，$\forall v_i, v_j \in V'$，边(v_i, v_j)的权为v_i, v_j之间最短路径的权，得完全带权图$K_{2k}(2k=|V'|)$.

5　求K_{2k}中最小权完美匹配M.

6　将M中边对应的各最短路径中的边均在G中加重复边，得欧拉图G^*，转**2**.

对算法的几点说明：

在**1**中，由于G中无奇度顶点，又G是连通图，因而G为欧拉图.

在**2**中，用§8.1中介绍的算法求欧拉回路.

在**3**中，用§14.1中介绍的Dijkstra算法求最短路径.

在**5**中，求带权图的最小权最大匹配已有复杂度为$O(n^3)$的算法，n为顶点数.

【例14.4】　求图14.7所示带权图中的最优投递路线.

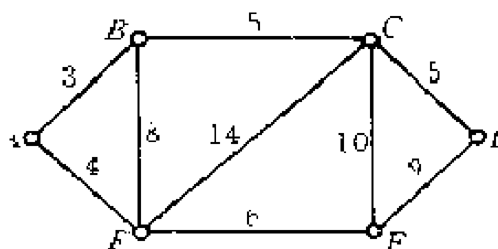
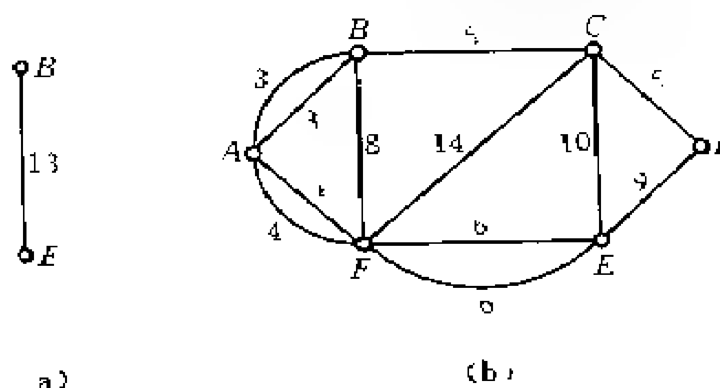


图　14.7

解 图中只有两个奇度顶点，即 $V'=\{B,E\}$，容易求出 B 到 E 的最短路径 $BAFE$，其权为 13. 完全带权图 K_2 为图 14.8(a)所示，相应的欧拉图 G^* 为图 14.8(b)所示. 若邮局在 A，从 A 出发的任意一条欧拉回路都是最优投递路线，其权为 $W(G^*)$. 如 $C=AFEDCBAFECFBA$ 就是其中的一条，$W(C)=77$.



(a)　　　　(b)

图 14.8

【例 14.5】 求图 14.9 所示图 G 的最优投递路线.

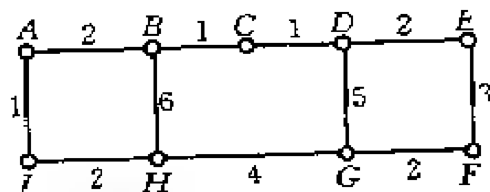


图 14.9

解 奇度顶点集 $V'=\{B,H,G,D\}$，$|V'|=4$. 用 Dijkstra 算法容易求出：

B 到 D 的最短路径为 BCD，其权为 2，

B 到 H 的最短路径为 $BAIH$，其权为 5，

B 到 G 的最短路径为 $BCDG$，其权为 7；

D 到 H 的最短路径为 $DCBH$，其权为 8；

D 到 G 的最短路径为 DG，其权为 5；

H 到 G 的最短路径为 HG，其权为 4.

算法第 4 步所要求的完全图 K_4 为图 14.10(a)所示. 图中最

小权完美匹配为 $M=\{(B,D),(H,G)\}$. 在 G 中,将 K_4 中 BD 和 HG 对应的最短路径上的各边重复一次得欧拉图为图 14.10(b)

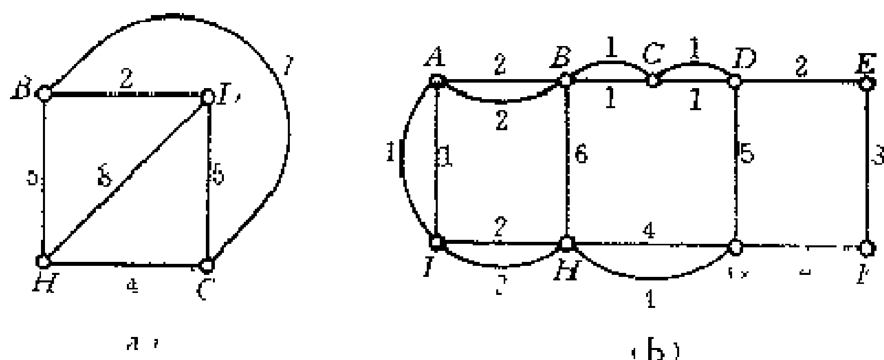


图 14.10

所示. 图 G 的最优投递路线的权为 $W(G^*)=40$.

§14.4 最小生成树

定义 14.6 设无向连通带权图 $G=\langle V,E,W\rangle$, G 中带权最小的生成树称为 G 的**最小生成树**.

若 $G=\langle V,E,W\rangle$ 中, V 为 n 个城市的集合, E 是城市之间道路的集合,而对于任意的 $e=(v_i,v_j)$, $W(e)=w_{ij}(w_{ij}>0)$ 为造公路 e 的造价,则 G 中每棵最小生成树都是 n 个城市间的总造价最小的公路网.

下面先讨论最小生成树的性质.

定理 14.6 设 T 是无向连通带权图 $G=\langle V,E,W\rangle$ 中的一棵生成树,则下面命题等价:

(1) T 是 G 中的最小生成树;

(2) 任意的 $e\in E(T)$,设 e 对应的基本割集为 S_e,都有 e 是 S_e 中带权最小的边;

(3) 任意的 $e\in E(\overline{T})$($\overline{T}$ 为 T 的余树),设 C_e 是 e 对应的基本的回路,都有 e 是 C_e 中带权最大的边.

证明 (1)⇒(2). 若 S_e 中只有边 e，结论显然成立. 若 S_e 中除 e 外，还有弦，并且存在弦 $e'\in S_e$，$W(e')<W(e)$，令 $T'=(T-e)\cup\{e'\}$，易知 T' 还是 G 的生成树，且 $W(T')<W(T)$，这与 T 是 G 中最小生成树是矛盾的.

(2)⇒(3). 否则，即 e 不是 C_e 中带权最大的边，则 C_e 中存在树枝 e'，而 $W(e')>W(e)$. 但 e' 对应的基本割集 $S_{e'}$ 必含 e，这与(2)是矛盾的.

(3)⇒(1). 只要证明满足(3)的生成树 T 是 G 的最小生成树. 否则，T 满足(3)，但 T 不是最小生成树. 设 T 是 G 中最小生成树且 T' 是与 T 有最多公共边的最小生成树，下面来推矛盾. 设 $e=(v_i,v_j)\in E(T)-E(T')$，则 e 为 T' 的弦，设 C_e 为对应 T' 的弦 e 对应的基本回路，因而 $E(C_e)-\{e\}$ 中的边全在 T' 中，并且不能全在 T 中，否则 C_e 为 T 中的圈，这与 T 是树矛盾. 于是 $E'=\{e'\mid e'\in(E(C_e)-\{e\})\wedge e'\notin E(T)\}\neq\varnothing$. 由于 T' 是最小生成树，因而满足(1)，由(1)⇒(2)⇒(3)可知，T'满足(3). 于是，$\forall e'\in E'$，$W(e')\leqslant W(e)$. 若$\forall e'\in E'$，$W(e')<W(e)$，则 $e'=(v_s,v_t)$ 的两个端点在 T 中的唯一的路径不含 e，否则由于 e' 是 T 的弦，因而对 T 来说，e 对应的基本割集必含 e'，由 T' 是最小生成树，因而由(1)⇒(2)可知，这是矛盾的. 因而存在 $e''\in E'$，使得 $W(e'')=W(e)$. 令 $T^*=(T'-e'')\cup\{e\}$，则有 $W(T^*)=W(T')$，因而 T^* 也是 G 的最小生成树，但 $|E(T)\cap E(T^*)|=|E(T)\cap E(T')|+1$，这与最小生成树 T' 的选取是矛盾的. 所以 T 是最小生成树. ∎

定理 14.7 设 $G=\langle V,E,W\rangle$ 是无向连通带权图，C 为 G 中任意一个圈，e' 是 C 中带权最大的边，则 $G-e'$ 中的最小生成树 T^* 也是 G 中的最小生成树。

证明 首先证明在 G 中一定存在最小生成树 T^*，$e'\notin E(T^*)$. 设 T 为 G 的任意一棵最小生成树，若 $e'\notin E(T)$，令 $T^*=T$. 否则 $e'\in E(T)$，由于 $e'\in E(T)\cap E(C)$，则 e' 对应的基本割集 $S_{e'}$ 中还必含 C 中的边 e''，否则 $G-S_{e'}$ 仍然连通. 由已知条件可知，

$W(e'')$，由定理14.6可知 $W(e') = W(e'')$，于是 $W(\ldots)$，令 $T^* = (T - e') \cup \{e''\}$，则 $W(T^*) = W(T)$，但有 T^* 为最小生成树并且不含 e'，显然 T^* 为 $G - e'$ 的生成树．于是对于 $G - e'$ 的任意的最小生成树 T_1，T_1 显然也是 G 的生成树，并且 $W(T_1) = W(T^*)$，于是 T_1 是 G 的最小生成树．由于 T^* 是 G 的最小生成树，因而必有 $W(T_1) = W(T^*)$． ▌

定理 14.8 设 $G = <V, E, W>$ 为无向连通带权图．$S = (V_1, V_2)$ 为 G 中一个断集，$e' \in S$ 且 $W(e') = \min_{e \in S}\{W(e)\}$，设 T' 是以 e' 为树枝的所有生成树中带权最小的，则 T' 是 G 的最小生成树．

证明 首先证明 G 中存在 e' 为树枝的最小生成树 T^*．设 T 为 G 中的任意一棵最小生成树，若 $e' \in E(T)$，则取 $T^* = T$，若 $e' \notin E(T)$，则 e' 为 T 的弦，因而存在对应 e' 的基本回路 C_e，由于 $e' \in E(C_e) \cap S$，所以 $\exists\, e'' \in E(C_e) \cap S$，且 $e'' \neq e'$．由定理 14.6 可知，$W(e') \geq W(e'')$，又由已知条件知，$W(e') \leq W(e'')$，从而 $W(e'') = W(e')$．令 $T^* = (T - e'') \cup \{e'\}$，则 $W(T^*) = W(T)$，所以 T^* 是 G 的最小生成树且含边 e'．由于 T' 是以 e' 为树枝的所有生成树中带权最小的，所以 $W(T') \leq W(T^*)$．又因 T' 是 G 的生成树是显然的，而 T^* 是最小生成树，所以 $W(T^*) \leqslant W(T')$．于是 $W(T') = W(T^*)$，故 T' 是 G 的最小生成树． ▌

定理 14.9 设 $G = <V, E, W>$ 是无向连通带权图，e 是 G 非环且是带权最小的边．则 G 中一定存在含 e 作为树枝的最小生成树．

证明 设 T' 为 G 中一棵最小生成树，若 e 是 T' 的树枝，则取 $T^* = T'$ 满足要求．若 $e \notin E(T')$，则 e 为 T' 的弦，设 C_e 为弦 e 对应的基本回路，若 C_e 上存在边 e'，有 $W(e') = W(e)$，取 $T^* = (T' - e') \cup \{e\}$，则 $W(T^*) = W(T')$，则 T^* 是满足要求的最小生成树．否则，C_e 上的其它边（T' 的树枝）的权都大于 $W(e)$，这与定理 14.6 中的(3)是矛盾的，所以不会出现这种情况． ▌

定义 14.7 设$G=<V,E>$为一个无向图，$e=(v_i,v_j)$为G中一条非环边. 将v_i,v_j合并成一个顶点v'（超点），使v'关联v_i与v_j关联的一切边，称为边e的两个端点v_i与v_j的**短接**.

注意边的端点的短接与边的收缩的区别. 在边e的端点的短接中，边e为所得图的环，而e收缩后所得图中边e不存在了. 另外，超点v'往往由v_i或v_j充当.

定理 14.10 设$G=<V,E,W>$为一个无向连通带权图，e是G中非环的带权最小的边，设G'是G中短接e的两个端后所得的图，T'是G'中的最小生成树，在G中设$T^*=G[E(T')\cup\{e\}]$，则T^*是G中的最小生成树.

证明 T^*是G的生成树是显然的. 由T^*的构造可知

$$W(T^*)=W(T')+W(e). \tag{1}$$

由定理 14.9 知，G中存在含e的最小生成树，设$\tilde{T}$是G中含e的一棵最小生成树，设$\tilde{T}'$是$\tilde{T}$中短接e的两个端点的图，显然$\tilde{T}'$是G'的生成树. 因而

$$W(\tilde{T})=W(\tilde{T}'+W(e)). \tag{2}$$

若T^*不是G中最小生成树，则

$$W(\tilde{T})<W(T^*), \tag{3}$$

由(1)，(2)，(3)可知

$$W(\tilde{T}')<W(T').$$

这矛盾于T'是G'的最小生成树，因而T^*是G的最小生成树.

▌

下面给出求最小生成树的几种算法.

1. 避圈法

此算法由 Kruskal 于 1956 年给出，所以避圈法也称为 Kruskal 算法.

设$G=<V,E,W>$为n阶m条边的无向连通图，E中边按它们所带权的大小编号，即$W(e_1)\leqslant W(e_2)\leqslant\cdots\leqslant W(e_m)$. 用避圈法求$G$中最小生成树的算法如下：

开始 令 $T_0=\langle V,\varnothing\rangle$，$i\leftarrow 1$，$j\leftarrow 0$.

1 若 $T_j\cup\{e_i\}$ 含圈转 **2**，否则转 **3**.

2 $i\leftarrow i+1$，转 **1**.

3 令 $T_{j+1}=T_j\cup\{e_i\}$，$j\leftarrow j+1$.

4 若 $j=n-1$，停止，否则转 **2**.

由于 G 是连通图，当算法结束时，得到的 G 的 $n-1$ 阶无圈子图 T_{n-1}，由定理 9.1 可知 T_n 是 G 的生成树，又被算法留在 T_{n-1} 外的边均为 T_{n-1}的弦，由算法可知，这些弦在它们所对应的基本回路中是带权最大的边，由定理 14.6(3)可知，T_{n-1}是 G 的最小生成树，综上所述，Kruskal 的避圈法是正确的.

避圈法算法的复杂度为 $O(m\ln m)$，其中 m 为 G 中边数.

【例 14.6】 用避圈法求图 14.11 所示图的最小生成树.

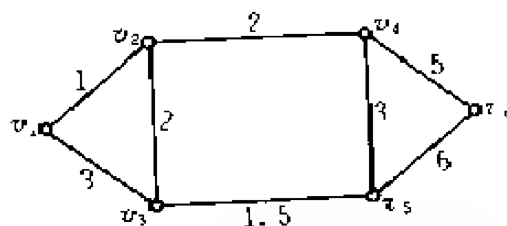


图 14.11

解 图 14.12 给出了算法的计算过程，实线边表示树枝.

所得生成树 T 为最小生成树，$W(T)=11.5$.

在避圈法中，要判所得 G 的子图是否含圈，若将算法每步中得到的树枝的两个端点短接，就可不用判圈，所以还可以得到逐步短接法的算法.

2. 逐步短接法

仍设 $G=\langle V,E,W\rangle$ 为 n 阶 m 条边无向连通带权图，并设 G 中不含环(因为环不会在生成树中)，且 $W(e_1)\leqslant W(e_2)\leqslant\cdots\leqslant W(e_m)$.

算法的主要步骤如下：

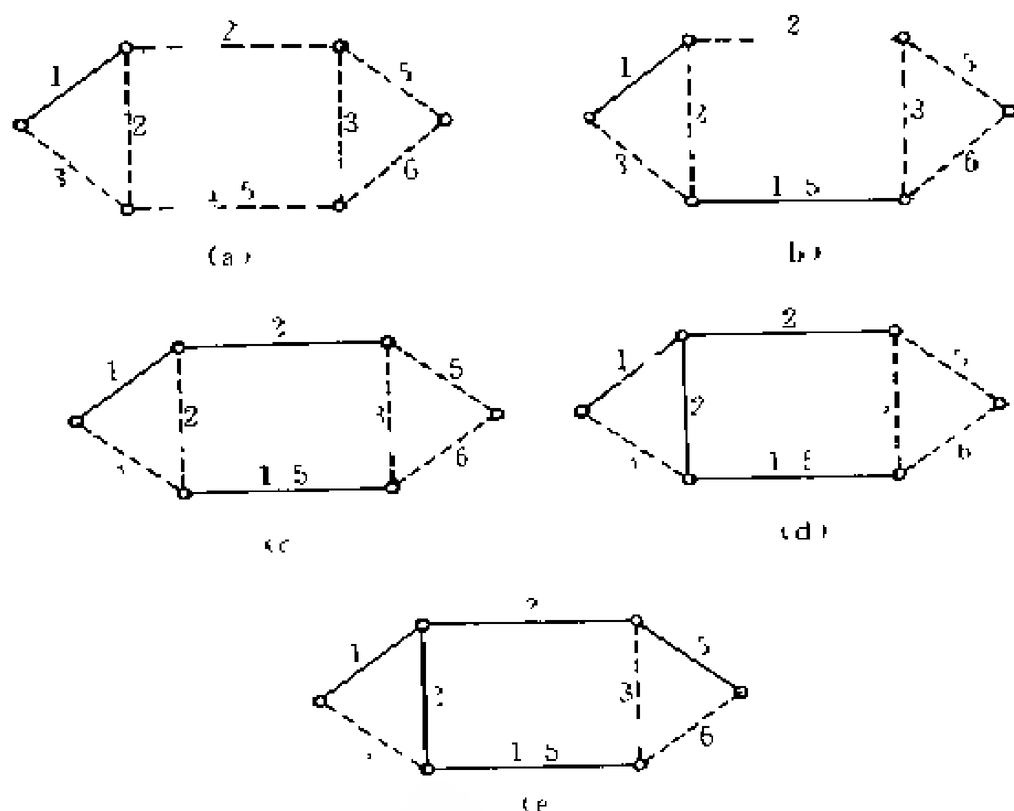


图　14.12

开始　令 $G_1' \leftarrow G, k \leftarrow 1$.

1　设 $e_1^k=(v_1^k,v_2^k)$ 为 G_k' 中带权最小的边，短接 v_1^k, v_2^k 得超点 v_k'，所得图为 G'_{k+1}，若 G'_{k+1} 中含环就全部删除.

2　$k \leftarrow k+1$.

3　若 $k=n$，结束，否则转 **1**.

设在算法过程中短接端点边集为 $E'=\{e_1^1, e_1^2, \cdots, e_1^{n-1}\}$，则 $G[E']$ 为 G 中一棵最小生成树. 在算法中被删除的环全是所得最小生成树的弦.

由定理 14.9 和定理 14.10，逐步短接法的算法是正确的.

此算法由 O. Boruvka 给出，其复杂度为 $O(m\ln n)$

【例 14.7】　用逐步短接法求图 14.11 所示图的最小生成树.

解 用图表示出算法的全部过程. 短接两个端点的全体边的导出子图为图 14.13(f)所示. 算法中共产生 4 个环,它们都被删除,均为弦.

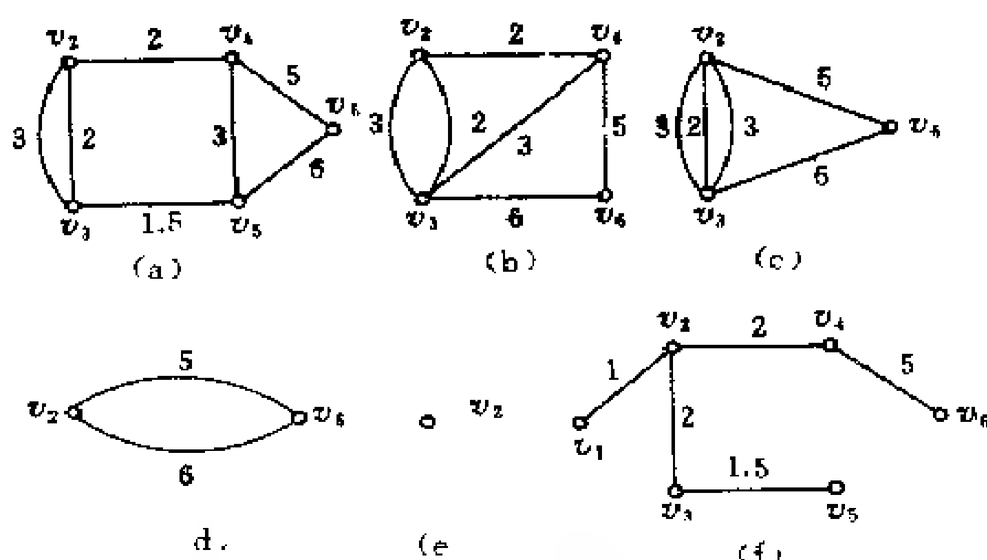


图 14.13

在(a)中短接了(v_1,v_2)的端点 v_1,v_2,记超点 $v_1'=v_2$. 在(b)中,短接了(v_3,v_5)的端点 v_3,v_5,记超点 $v_2'=v_3$. 在(c)中,短接了(v_2,v_4)的端点 v_2,v_4,记超点 $v_3'=v_2$. 在(d)中,短接了(v_2,v_3)(权为 2 的边)的端点 v_2,v_3,记超点 $v_4'=v_2$,删除权为 3,3 的两条环作为弦. 在(e)中,短接了(v_2,v_6)(权为 5 的边)的两个端点 v_2,v_6,记超点 $v_5'=v_2$,删除了权为 6 的边作为弦.

3. 破圈法

破圈法由 Rosenstiehl 于 1967 年和管梅谷于 1975 年分别给出.

设 $G=<V,E,W>$ 为 n 阶 m 条边的连通带权图,用破圈法求 G 的最小生成树的步骤如下.

开始 令 $G_0 \leftarrow G, k \leftarrow 0$.

1 若 G_k 中不含圈,转 **2**. 否则,设 C 为 G_k 中一个圈,e_k 为 C 上带权最大的边,令 $G_{k+1} \leftarrow G_k - e_k; k \leftarrow k+1$,重复 **1**.

2　结束.

结束时,G_k 为 G 中最小生成树.

由定理 14.7 可知,破圈法的正确性.

破圈法的复杂度与避圈法相当. 当 G 中圈较少时,用破圈法比避圈法好些.

【例 14.8】　用破圈法求图 14.11 中的最小生成树.

解　先选哪个圈都没关系. 若先选的圈为 $v_4v_5v_6v_4$,则删除边 (v_5,v_6),再选圈 $v_1v_2v_3v_1$,删除边 (v_1,v_3),再取圈 $v_2v_4v_5v_3v_2$,删除边 (v_4,v_5),最后得生成树 T,$W(T)=11.5$. 虽然以上三种方法得到的最小生成树均是同一棵,但这无一般性,一般说来,图中的最小生成树不一定唯一.

4. 断集法

此算法由 Prim 于 1957 年提出.

设 $G=<V,E,W>$ 为 n 阶 m 条边无向连通带权图. 断集法的主要步骤如下:

开始　取 v 为 V 中任一顶点,令 $V_0\leftarrow\{v\}$,$E_0\leftarrow\varnothing$,$k\leftarrow 0$.

1　若 $V_k=V$,结束,否则转 **2**.

2　构造断集 $(V_k,\bar{V}_k)$,设 $e_k=(v_k,v_k')$ 为 $(V_k,\bar{V}_k)$ 中带权最小的边(若不唯一可任选一条),令 $V_{k+1}\leftarrow V_k\cup\{v_k'\}$ $(v_k'\in\bar{V}_k)$,$E_{k+1}\leftarrow E_k\cup\{e_k\}$,$k\leftarrow k+1$,转 **1**.

由定理 14.8 保证断集法是正确的. 算法的复杂度为 $O(m+n\ln n)$,其中 m,n 分别为 G 的边数和顶点数.

§14.5　最　优　树

设 T 是 m 叉树,若对 T 的每片树叶指定一个实数,则称 T 为带权的 m 叉树.

定义 14.8　设二叉树 T 有 t 片树叶,分别带权为 w_1,w_2,…,

w_t. 称 $W(T)=\sum_{i=1}^{t} w_i L(v_i)$ 为 T 的权，其中 $L(v_i)$ 为带权 w_i 的树叶 v_i 的层数.

定义 14.9 在所有带权为 $w_1, w_2, \cdots, w_t$ 的 t 片树叶的二叉树中，其权最小的二叉树称为最优二叉树，简称**最优树**.

下面介绍求最优树的 Huffman 算法.

给定实数 $w_1, w_2, \cdots, w_t$，且设 $w_1 \leqslant w_2 \leqslant \cdots \leqslant w_t$. 算法的步骤如下：

1 连接以 w_1, w_2 为权的两片树叶，得到分支点带权为 $w_1 + w_2$.

2 在 $w_1 + w_2, w_3, w_4, \cdots, w_t$ 中再取两个最小的权，连接它们对应的顶点又得到新的分支点及所带的权，重复 2 直到形成 $t-1$ 个分支点，t 片树叶为止.

【例 14.9】 用 Huffman 算法求带权为 2，3，5，7，8 的最优二叉树.

解 求最优树的过程由图 14.14 给出.

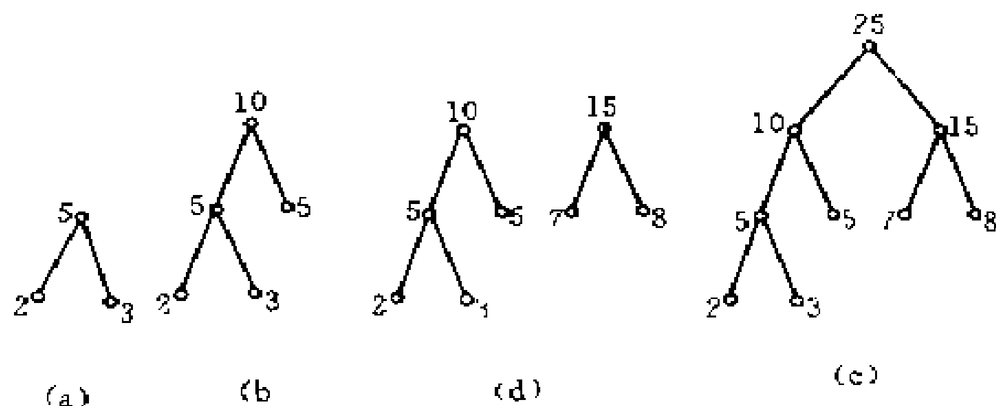


图 14.14

$W(T)=55$.

为了证明 Huffman 算法的正确性，先证下面定理.

定理 14.11 在带权为 $w_1 \leqslant w_2 \leqslant \cdots \leqslant w_t$ 的所有最优树中，一定存在以权为 w_1, w_2 的两顶点 v_1, v_2 为兄弟，且 v_1, v_2 的层数都是

树高 h 的最优树.

本定理的证明留作习题.

定理 14.12(Huffman 定理) 设 T' 是带权为 $w_1+w_2, w_3, \cdots, w_t$ 的最优二叉树，其中 $w_1<w_2<\cdots<w_t$，如果将 T' 中带权为 w_1+w_2 的树叶作为分支点，使它带两个儿子，带权分别为 w_1 和 w_2，记所得树为 T^*，则 T^* 是带权为 $w_1, w_2, \cdots, w_t$ 的最优树.

证明 由定理 14.11 可知，存在带权为 $w_1<w_2\leqslant\cdots<w_t$ 的最优树 $\tilde{T}$，w_1, w_2 对应的顶点 v_1, v_2 为兄弟且它们的层数为树高 h. 下面证明 $W(T^*)=W(\tilde{T})$. 令 $\hat{T}=\tilde{T}-\{v_1, v_2\}$，则 $\hat{T}$ 是带权 $w_1+w_2, w_3, \cdots, w_t$ 的二叉树. 易知：

$$W(T^*)=W(T')+w_1+w_2, \tag{1}$$

$$W(\tilde{T})=W(\hat{T})+w_1+w_2. \tag{2}$$

若 T^* 不是最优树，则 $W(T^*)>W(\tilde{T})$，于是，

$$W(T')>W(\hat{T}).$$

这矛盾于 T' 是带权为 $w_1+w_2, w_3, \cdots, w_t$ 的最优树. ▌

由 Huffman 定理易知 Huffman 算法是正确的.

定理 14.13 设 $r(r\geqslant 2)$ 叉正则树 T 的分支点数为 i，树叶数为 t，则 $(r-1)i=t-1$.

本定理的证明留作习题.

由定理 14.13，可以推广 Huffman 算法.

给定 t 个实数 $w_1<w_2\leqslant\cdots\leqslant w_t$，求带权为 $w_1, w_2, \cdots, w_t$ 的最优 r 叉树可分以下两种情况讨论：

(1) 若 $t-1\equiv 0(\mathrm{mod}(r-1))$，说明所求 r 叉树为正则树，可仿 Huffman 算法求出 r 叉正则树.

(2) 若 $t-1\equiv s(\mathrm{mod}(r-1))$，$1\leqslant s\leqslant r-2$，说明所求树不是正则树，可将 $s+1$ 个较小的权对应的树叶为兄弟，放在最高层上，它们的父亲带权为 $w_1+w_2+\cdots+w_s+w_{s+1}$，然后仿 Huffman 算法.

【例 14.10】 求最优 3 叉树.

(1) 权为 1, 1, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 7.

(2) 权为 1,1,2,3,3,4,5,6,7,8.

解 易知,(1)中权对应的最优 3 叉树为正则的,(2)中权对应的最优 3 叉树不是正则的.画出的 3 叉树分别由图 14.15(a),(b)给出.

(a)中树的权为 61,(b)中树的权为 81.

下面介绍最优树的应用.

在通信工作中,常用二进制数字 0,1 组成的符号串(简称为二元码)来表示数字、字母、汉字等,用长为 n 的二元码最多可表示 2^n 个符号.若传输的符号出现的频率不同,用等长的码子传输它们就造成浪费,因而想办法利用不等长的码子来传输.

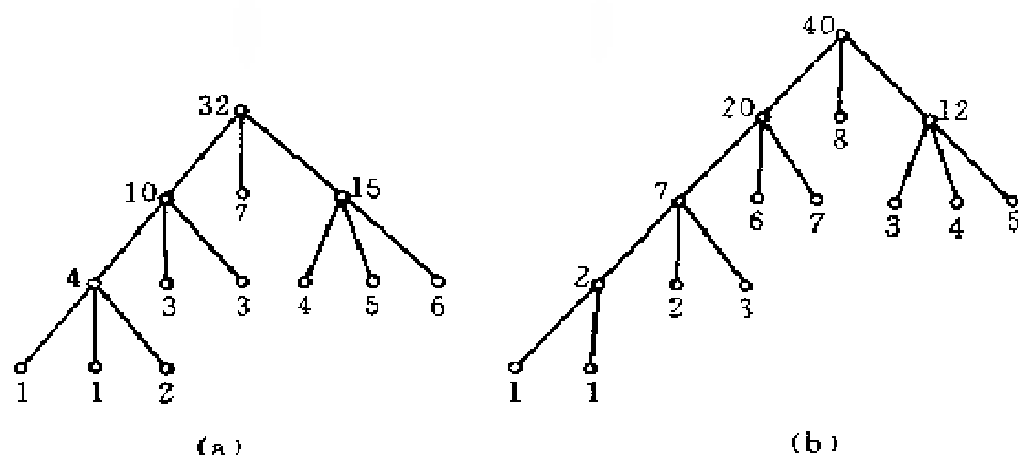


图 14.15

定义 14.10 设 $\beta=\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ 为长为 n 的符号串,称其子串 α_1, $\alpha_1\alpha_2$, $\cdots$ $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}$ 分别为 β 的长为 $1,2,\cdots,n-1$ 的**前缀**.设 $B=\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m\}$,若对于任意的 $\beta_i,\beta_j\in B, i\neq j, \beta_i$ 与 β_j 互不为前缀,则称 B 为**前缀码**.若 β_i 中只出现 0 与 1,则称 B 为二元前缀码.

{0,10,110,1111},{1,01,001,000}等均为前缀码,而{1,11,101,001,0011}等不是前缀码.

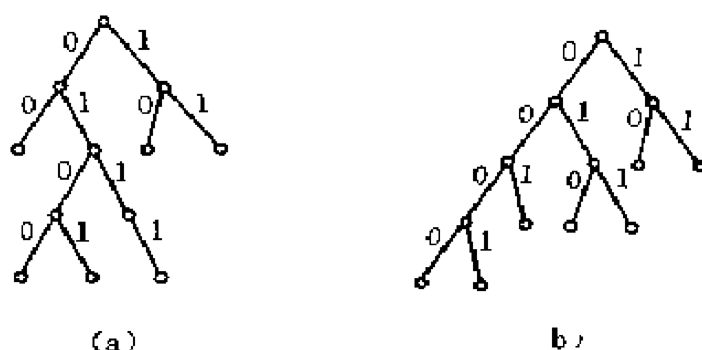
用二叉树可以产生前缀码.

定理 14.14 一棵二叉树可以产生一个前缀码.

证明 给定一棵二叉树 T，设 T 有 t 片树叶. 对于 T 的任意的分支点 v_x，若 v_x 有一个儿子 v_y，将 v_x 引出的唯一的一条边 $<v_x, v_y>$ 上标上 0 或 1. 若 v_x 有两个儿子 v_y, v_z，且 v_y 在 v_z 的左边，则在边 $<v_x, v_y>$ 上标 0，$<v_x, v_z>$ 上标 1. 从树根 v_0 到每片树叶的通路上所标的数字组成一个二元的符号串记在该片树叶处，于是得到 t 个符号串 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$，记 $B=\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t\}$，则 B 为前缀码. 这是因为第 i 片树叶 v_i 处的符号串 β_i 的前缀均在从树根 v_0 到 v_i 的通路上，所以任意 $\beta_i, \beta_j \in B$，β_i 与 β_j 互不为前缀，即 $B=\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t\}$ 为前缀码. ▌

推论 一棵二叉正则树可以产生唯一的一个前缀码.

图 14.16(a)所示二叉树（非正则）产生的前缀码为{00,0100,0101,0111,10,11}. 而(b)所示二叉树（正则的）产生的前缀码为{0000,0001,001,010,011,10,11}.



(a)　　　　(b)

图 14.16

如果在通信工作中用前缀码传输符号，希望所用二进制数字越少越好，于是就用最优树产生的前缀码，称这样的前缀码为**最佳前缀码**. 具体做法如下：

设在通信工作中，符号 $A_1, A_2, \cdots, A_t$ 出现的频率分别为 $p_1, p_2, \cdots, p_t$. 求传输它们的最佳前缀码的过程如下：

设 $w_i=100p_i$，$i=1,2,\cdots,t$，不妨设 $w_1 \leqslant w_2 \leqslant \cdots \leqslant w_t$. 用 Huffman 算法求最优树 T，所得的前缀码$\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t\}$为最佳前缀码，$W(T)$ 为传输 100 个按给定频率所出现的符号所用的二进

制数字的个数.

【例 14.11】 在通信中,八进制数字 0,1,2,…,7 出现的频率为:

0 : 30%	1 : 20%
2 : 15%	3 : 10%
4 : 10%	5 : 5%
6 : 5%	7 : 5%

求传输它们的最佳前缀码,并讨论传输 $10^n(n\geqslant 2)$ 个按所给频率出现八进制数字比"等长传输法"提高效率百分之几?

这里所说"等长传输法"是指用 000 传 0,001 传 1,…,111 传 7.

解 $w_i=100p_i$,$i=0,1,2,\cdots,7$,按从小到大顺序为 $5\leqslant5\leqslant5<10\leqslant10<15<20<30$,所对应的最优树为图 14.17 所示.

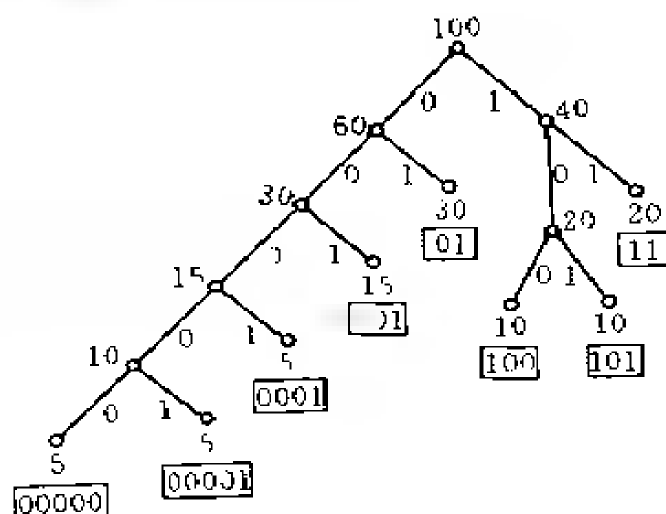


图 14.17

八进制数字对应的前缀码为

0	01	1	11
2	001	3	100
4	101	5	0001
6	00001	7	00000

$W(T)=275$,说明传输 100 个八进制数字用 275 个二进制数

字，所以传输 10^n 个用 $275\times10^{n-2}=2.75\times10^n$ 个二进制数字. 而用"等长的码子"传 10^n 个八进制数字用 3×10^n 个二进制数字，所以提高效率为

$$\frac{3\times10^n-2.75\times10^n}{3\times10^n}\approx8\%.$$

还应该指出，所求的最优树可能不只一棵，但它们的权是相等的.

§14.6 货郎担问题

设有 n 个城市，城市之间均有道路，一个旅行商从某城市出发，经过其余 $n-1$ 个城市一次且仅一次，最后回到出发的城市，他如何走才能使他所走的路程最短？这就是著名的**旅行商问题**或**货郎担问题**. 这个问题可以化归如下的图论问题.

设 $G=\langle V,E,W\rangle$ 是 n 阶完全带权图，各边的权非负，且有的边的权可以是 ∞. 求 G 中最短的哈密尔顿回路的问题就是货郎担问题.

在完全带权图 K_n 中，共有 $n!$ 条不同的哈密尔顿回路，当只考虑所含边的同异，而不考虑通过顺序及始点(终点)时，还有 $\frac{1}{2}(n-1)!$ 种不同的哈密尔顿回路. 对货郎担问题来说还要计算各条回路的长度，然后还要进行比较，这种问题的计算量是相当大的，它同前几节讲的问题有本质的区别. 例如最短路问题、关键路径问题、中国邮递员以及最小生成树等问题，它们的共同特点是计算复杂度都是关于图的顶点数 n 和边数 m 的多项式函数，这类问题统称为是有有效算法(或好算法)的问题. 而货郎担问题以及与它在算法上等价的问题至今没有找到有效的算法，也没有证明没有有效算法[1]. 于是人们就去寻找近似算法，在本节给出货郎担问题的三

[1] 关于算法及问题的分类请参阅计算复杂性理论

种近似算法.

1. 最邻近法

设 $G=<V,E,W>$ 为 $n(n\geqslant 3)$ 阶无向完全带权图，各边所带权均为正数. 求从某顶点出发的哈密尔顿回路作为最短哈密尔顿回路的近似解的算法的大体步骤如下：

设 v_{i_1} 作为始点.

1 先访问 v_{i_1}，形成初始路径 $P_1=v_{i_1}$.

2 若已访问完了第 $k(k<n-1)$ 个顶点，形成了路径 $P_k=v_{i_1}v_{i_2}\cdots v_{i_k}$，下一步访问的顶点 $v_{i_{k+1}}$ 应该是 $V-\{v_{i_1},v_{i_2},\cdots,v_{i_k}\}$ 中离 v_{i_k} 最近的顶点.

3 当访问完 G 中所有顶点后，形成路径 $P_n=v_{i_1}v_{i_2}\cdots v_{i_n}$，得回路 $C=v_{i_1}v_{i_2}\cdots v_{i_n}v_{i_1}$ 即为 G 中一条哈密尔顿回路，它作为货郎担问题的近似解.

由于算法的每一步都是寻找离当前访问的顶点最近的顶点，因而称此种算法为最邻近法. 此算法的复杂度为 $O(n^2)$，n 为 G 的顶点数.

最邻近法的性能并不好，用这种方法走出的哈密尔顿回路可以是最优解(即最短的哈密尔顿回路)，也可能走出最坏的解(即最长的哈密尔顿回路). 请看下例.

【例 14.12】 用最邻近法求图 14.18 所示完全带权图 K_5 中的哈密尔顿回路(从不同的顶点出发).

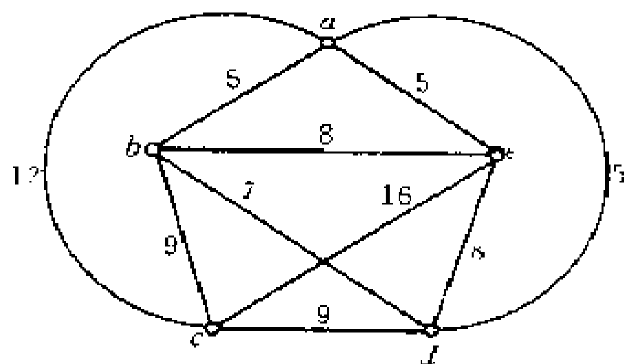


图 14.18

解 由于 $n=5$，所以图中存在 $\frac{4!}{2}=12$ 条不同的哈密尔顿回路，经过计算得知，图中最优解（如 $abcdea$ 和 $adcbea$ 等）的权均为 36. 而最坏的解（如 $abdeca$ 和 $acebda$ 等）的权为 48.

下面用邻近法求始于各顶点的哈密尔顿回路. 始于 a 的有 4 条：

$adebca$，权为 42；

$aedbca$，权为 41；

$aebdca$，权为 41；

$abdeca$，权为 48（最坏情况）.

始于 b 的有 2 条：

$baedcb$，权为 36（最好的情况）；

$badecb$，权为 43

始于 c 的有 2 条：

$cdabec$，权为 43；

$cdaebc$，权为 36（最好情况）.

始于 d 的有 2 条：

$dabecd$，权为 43；

$daebcd$，权为 36（最好情况）.

始于 e 的有 2 条：

$eabdce$，权为 42；

$eadbce$，权为 42.

从本例可以看出，最邻近法所求近似解与始点有关. 另外还可以看出这个算法可以走出最坏的情况，当然也可以走出最优解. 最邻近法的性能由下面定理给出.

定理 14.15 设 $G=\langle V,E,W\rangle$ 是 n 阶完全带权图，各边带的权均为正，并且对于任意的 $v_i,v_j,v_k\in V$，边 (v_i,v_j)，(v_j,v_k)，(v_i,v_k) 带的权 w_{ij},w_{jk},w_{ik} 满足三角不等式，即

$$w_{ij}+w_{jk}\geq w_{ik},$$

则

$$\frac{d}{d_0} \leq \frac{1}{2}(\lceil \log_2 n \rceil + 1),$$

其中，d_0 是 G 中最短哈密尔顿回路的权，而 d 是用最邻近法走出的哈密尔顿回路的权.

本定理的证明较长，此处略去.

从定理 14.15 可以看出，最邻近法的性能不算好.

2. 最小生成树法

设 $G=<V,E,W>$ 为 $n(n\geq 3)$ 阶无向完全带权图，任意的 v_i，$v_j\in V$，边 (v_i,v_j) 的权 $w_{ij}>0$，且对任意的 $v_i,v_j,v_k\in V$，

$$w_{ij}+w_{jk}\geq w_{ik}.$$

用最小生成树法求 G 中最优解的近似算法如下：

(1) 求 G 的一棵最小生成树 T.

(2) 将 T 中各边均添加一条平行边，树枝 e 对应的平行边与 e 带的权相同，设所得图为 G^*，则 G^* 为欧拉图.

(3) 求 G^* 中从某顶点 v 出发的一条欧拉回路 E_v.

(4) 在 G 中按照下面方法求从顶点 v 出发的哈密尔顿回路. 从 v 出发沿 E_v 访问 G^* 中各顶点，其原则是：在未访问完所有顶点之前，一但出现重复出现的顶点就跳过它走到下一个顶点，称这种方法为"**抄近路法**". 直到访问完所有顶点为止，最后走出 G 的一条哈密尔顿回路 H_v，将 H_v 作为 G 的最优解的近似解.

本算法所求 H_v 是 G 的哈密尔顿回路是显然的. 计算复杂度为 $O(n^2)$，其中 n 为 G 的阶数.

【例 14.13】 用最小生成树法求图 14.18 中始于 b 和 c 的货郎担问题的近似解.

解 (1) 求最小生成树 T(图 14.19 中实边所示的图，未加平行边之前).

(2) 将 T 中各边加平行边(图 14.19 中实边所示的图).

(3) 从 b 出发的欧拉回路有 4 条，分别记为 $E_{b,1}$，$E_{b,2}$，$E_{b,3}$，$E_{b,4}$，相应的哈密尔顿回路记为 $H_{b,1}$，$H_{b,2}$，$H_{b,3}$，$H_{b,4}$.

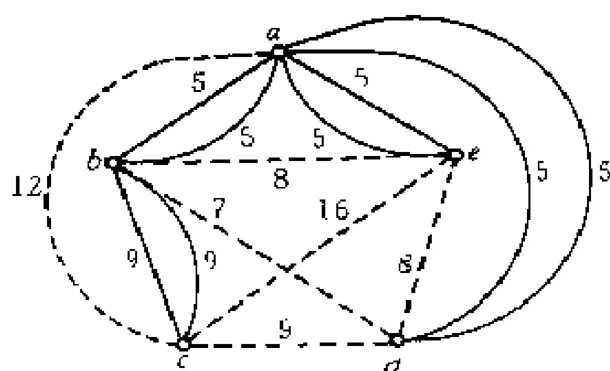


图 14.19

$E_{b,1}=bcbaeadab, H_{b,1}=bcaedb, W(H_{b,1})=41$;

$E_{b,2}=bcbadaeab, H_{b,2}=bcadeb, W(H_{b,2})=42$;

$E_{b,3}=baeadabcb, H_{b,3}=baedcb, W(H_{b,3})=36$;

$E_{b,4}=badaeabcb, H_{b,4}=badecb, W(H_{b,4})=43$;

从 c 出发的欧拉回路有 2 条：

$E_{c,1}=cbaeadabc, H_{c,1}=cbaedc, W(H_{c,1})=36$;

$E_{c,2}=cbadaeabc, H_{c,2}=cbadec, W(H_{c,2})=43$.

从本例可看出最小生成树法比最邻近法性能好. 事实也是如此，见下面定理.

定理 14.16 设 $G=<V,E,W>$ 为 $n(n\geq 3)$ 阶无向完全带权图，各边的权均大于 0，任意的 $v_i,v_j,v_k\in V$，边 $(v_i,v_j),(v_j,v_k),(v_i,v_k)$ 的权满足三角不等式：$w_{ij}+w_{jk}\geq w_{ik}$. d_0 是 G 中最短哈密尔顿回路的权，H 是用最小生成树法走出的 G 的哈密尔顿回路，其权为 d，则

$$\frac{d}{d_0}<2.$$

证明 设 T 是 G 中的一棵最小生成树，G^* 是 T 各树枝加重复边后所得欧拉图，E 是 G^* 中一条欧拉回路，H 是按抄近路法走出的 G 中的哈密尔顿回路，则 $W(H)=d$. 易知

$$W(E)=2W(T). \tag{1}$$

由于 G 中边的权满足三角不等式，所以

$$W(H)=d\leq W(E). \tag{2}$$

设 T' 是 G 中最短哈密尔顿回路 H_0 删除任何一条边后所得到的 G 的生成树，则

$$W(T) < W(T') < d_0 \tag{3}$$

由(1),(2),(3)知

$$d < 2d_0, \text{即} \frac{d}{d_0} < 2. \quad \blacksquare$$

3. 最小权匹配法

设 $G=\langle V,E,W\rangle$ 为 $n(n\geq 3)$ 阶带权图，各边所带权均为正且满足三角不等式. 用最小权匹配法求 G 中最短哈密尔顿回路的近似解的算法如下：

(1) 求 G 的一棵最小生成树 T.

(2) 设 T 中奇度顶点的集合为 $V'=\{v_1,v_2,\cdots v_{2k}\}$，求 V' 的导出子图 $G[V']=K_{2k}$ 中带权最小的完美匹配，将得到的 k 条边加到 T、得欧拉图 G^*.

(3) 在 G^* 中求从某顶点 v 出发的一条欧拉回路 E_v.

(4) 在 G 中，从 v 出发，沿 E_v 中边按抄近路法走出哈密尔顿回路 H_v.

以上算法的复杂度为 $O(n^3)$，n 为 G 的阶数.

【例 14.14】 用最小权匹配法求图 14.18 所示图始于 a 和 b 的货郎担问题的近似解.



(1) G 的最小生成树 T 为图 14.20(a)所示.

(2) T 中奇度顶点集合 $V'=\{a,c,d,e\}$. $G[V']$为图 14.20(b)所示. 最小权完美匹配 $M=\{(c,d),(a,e)\}$，将 M 中的边加到 T 上所得欧拉图 G^* 为图中(c)所示. (c)中图在 G 中为(d)中实线边所示.

(3) (c) 中欧拉图从 a 出发的欧拉回路有两条 $E_{a,1}$，$E_{a,2}$. G 中从 a 出发的抄近路法走出的哈密尔顿回路设为 $H_{a,1}$，$H_{a,2}$：

$E_{a,1}=aeadcba$，$H_{a,1}=aedcba$，$W(H_{a,1})=36$；

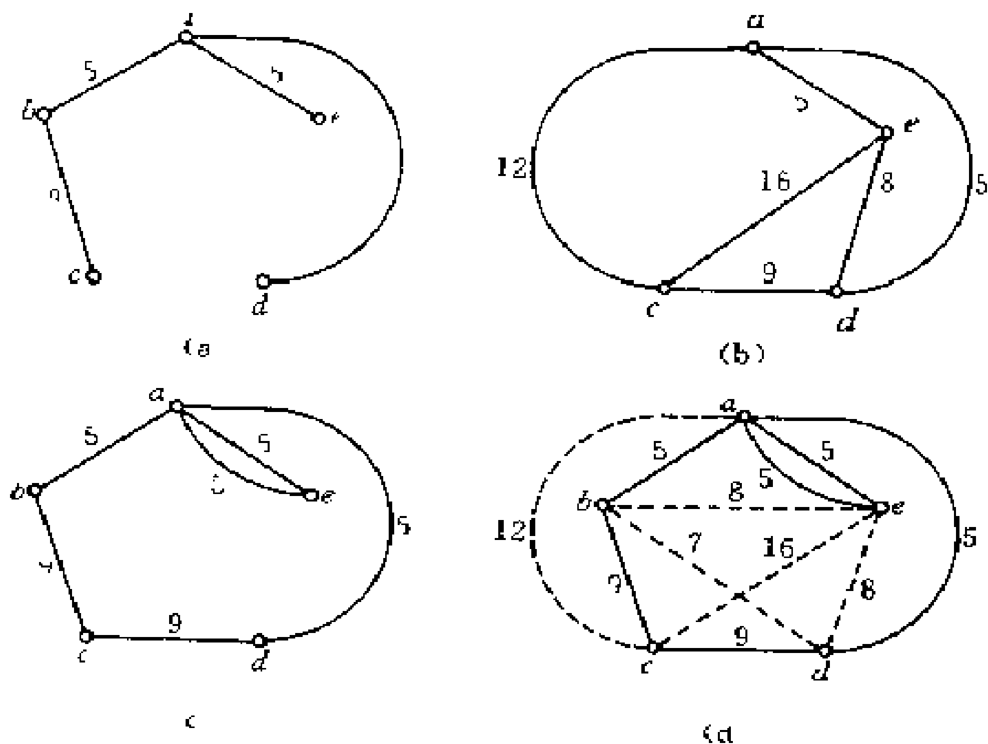


图 14.20

$E_{a,2}$ $adcbaea$，$H_{a,2}=adcbea$，$W(H_{a,2})=36$.

从 b 出发的欧拉回路只有一条：

$E_{b,1}$ $baeadcb$，H_b $baedcb$，$W(H_{b,1})$ 36.

粗略地看，就可知道最小权匹配法的性能更好些. 事实也如此.

定理 14.17 定理的条件同定理 14.16，则

$$\frac{d}{d_0}<\frac{3}{2}.$$

其中 d_0 是 G 中最短哈密尔顿回路的权，d 是用最小权匹配法得到的哈密尔顿回路的权.

证明 容易知道

$$W(T)<d_0. \tag{1}$$

现在设 $G[V']=K_{2k}$ 中最短哈密尔顿回路的权为 d_0'，由于 G 中满足三角不等式，所以必有

$$d_0'<d_0. \tag{2}$$

显然 $G[V']$ 中最小权匹配 M 中各边权之和 $\leqslant \frac{d_c'}{2} < \frac{d_0}{2}$.

由(1),(2),(3)知

$$W(E) < d_c + \frac{d_0}{2} - \frac{3}{2}d_0.$$

于是

$$\frac{d}{d_0} < \frac{3}{2}. \quad \blacksquare$$

求货郎担问题的近似解还有许多算法，这里就不介绍了.

习 题 十 四

1. 求图 14.21 所示带权图中 v_1 到 v_9 的最短路径.

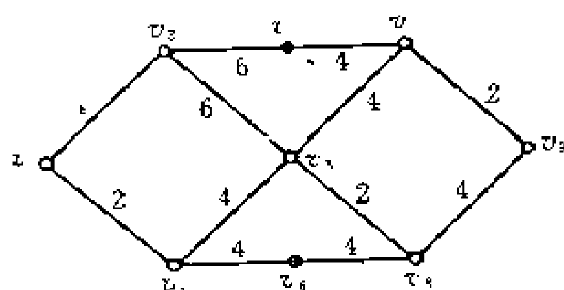


图 14.21

2. 求图 14.22 所示带权图中 v_1 到其余各顶点的最短路径

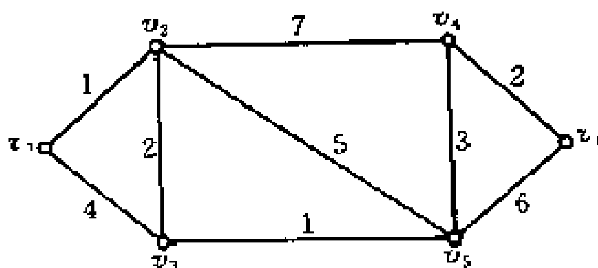


图 14.22

3. 求图 14.23 所示的有向带权图中 v_1 到 v_7 的最短路径.

4. 求图 14.24 所示 PERT 图中各顶点的最早完成时间、最晚完成时间、缓冲时间，并求关键路径

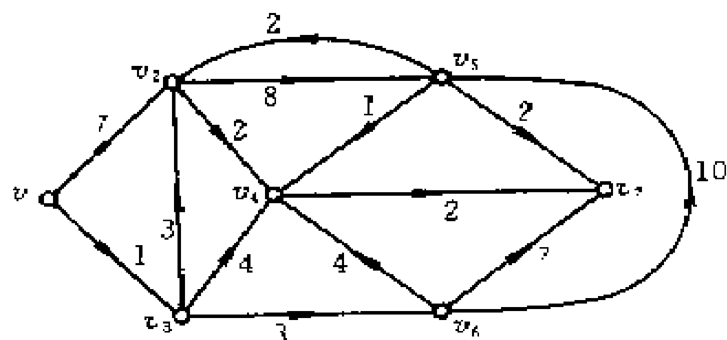


图　14.23

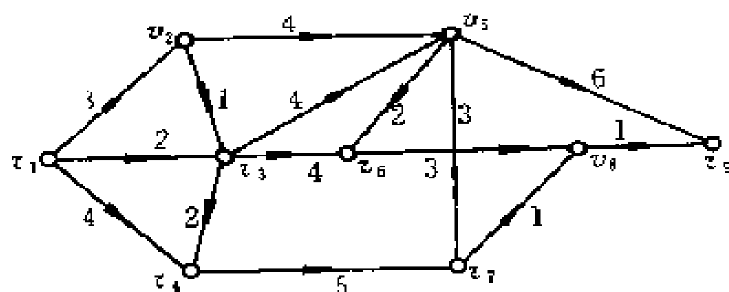


图　14.24

5. 求图14.25所示PERT图中的关键路径.

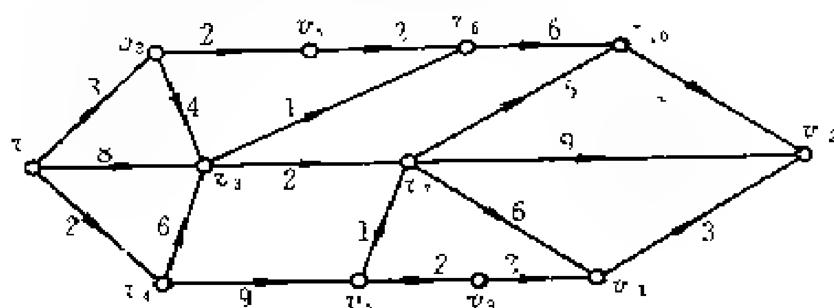


图　14.25

6. 证明定理14.1.

7. 证明定理14.2.

8. 求图14.26所示带权图中的最优投递路线.

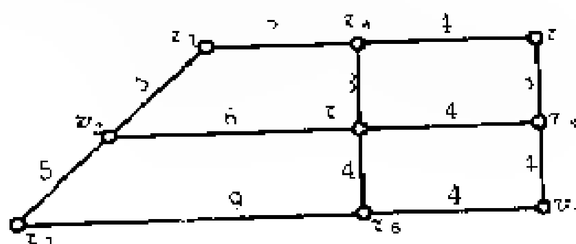


图　14.26

9. 分别用避圈法、破圈法、断集法和逐步短接法求图 14.27 所示带权图中的最小生成树.

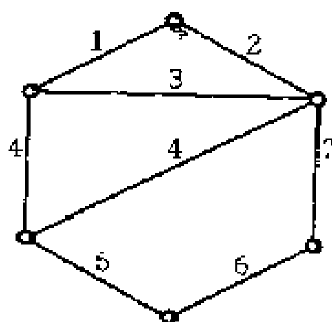


图 14.27

10. 证明定理 14.13.

11. (1) 1,1,1,2,2,3,4,5,6;

(2) 1,1,1,2,2,3,4,5,6,7;

(3) 2,2,3,3,4,4,5,5,6;

求以(1)中数为权的最优树(即最优二叉树)及以(2)、(3)中数为权的最优三叉树.

12. 在通信中,$a,b,\cdots,h$ 出现的频率为

a:25%	b:20%
c:15%	d:15%
e:10%	f:5%
g:5%	h:5%

求传输它们的最佳前缀码.

13. 5 阶完全带权图如图 14.28 所示.

(1) 用最邻近法求始于 v_1 的各哈密尔顿回路;

(2) 用最小生成树法求始于 v_1,v_2 的哈密尔顿回路;

(3) 用最小权匹配法求始于 v_1 的哈密尔顿回路;

(4) 求货郎担问题的最优解.

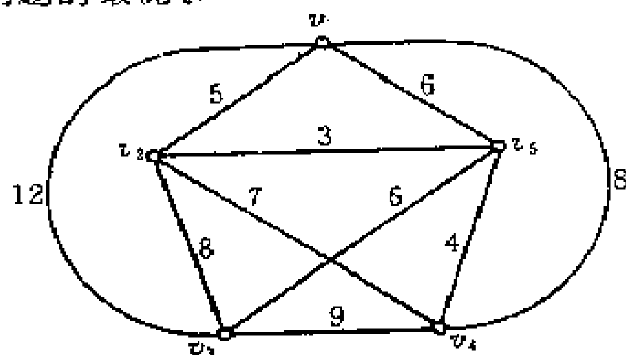


图 14.28

参考书目

[1] 耿素云,屈婉玲. 集合论导引. 北京大学出版社. 1990

[2] 陈进元,屈婉玲. 离散数学(上). 北京大学出版社. 1987

[3] 耿素云,方新贵. 离散数学(下). 北京大学出版社. 1989

[4] Herbert B. Enderton. Elements of Set Theory. Academic Press, Inc. 1977

[5] 方嘉琳. 集合论. 吉林人民出版社. 1982

[6] J. A. Bondy and U. S. R. Murty. Graph Theory with Applications. The Macmillan Press LTD. 1976

[7] 田丰,马仲蕃. 图与网络流理论. 科学出版社. 1987

[8] 王树禾. 图论及其算法. 中国科学技术大学出版社. 1990

[9] [美]F·哈拉里著,李慰萱译. 上海科学技术出版社. 1980

[10] 谢政,李建平. 网络算法与复杂性理论. 国防科技大学出版社. 1995

[11] 王朝瑞. 图论. 北京工业学院出版社. 1987

附录1 符号注释

符号	注释
A/R	商集
$A \approx B$	A 与 B 等势
$A \not\approx B$	A 与 B 不等势
$A \preccurlyeq\cdot B$	A 劣势于 B
$A \rightarrow B$	A 到 B 的全体全函数(或函数)
$A \mapsto B$	A 到 B 的全体偏函数
$A \nrightarrow B$	A 到 B 的全体真偏函数
B^A	同 $A \rightarrow B$
C	复数集合,简称复数集
$\mathrm{card}A$	A 的基数
$c(G)$	图 G 的周长
$\mathrm{dom}R$	R 的定义域
$E(G)$	图 G 的边集
F^{-1}	F 的逆
$F \circ G$	F 与 G 的合成
$F \upharpoonright A$	F 在 A 上的限制
$F[A]$	A 在关系 F 下的象
$F: A \rightarrow B$	F 是 A 到 B 的全函数(或函数)
$F: A \mapsto B$	F 是 A 到 B 的偏函数
$f(A')$	A 在函数 f 下的象
$G[V_1]$	子集 V_1 的导出子图
$G[E_1]$	边子集 E_1 的导出子图
$G-e$	从 G 中删除边 e
$G \backslash e$	收缩边 e
$G-E'$	从 G 中删除 E' 中各边
$G-v$	从 G 中删除顶点 v

符号	注释
$G-V'$	从 G 中删除 V' 中各顶点
$G\cup(u,v)$	在顶点 u 与 v 之间加新边
$G_1\cong G_2$	G_1 与 G_2 同构
$g(G)$	G 的围长
I_A	A 上的恒等关系
$I_G(v)$	G 中顶点 v 关联的边集
K_n	n 阶完全图
$K_{r,s}$	完全二部图
$K_{n_1,n_2,\cdots,n_r}$	r 部图
N	自然数集合
N	除 0 外的自然数集合
N_n	n 阶零图
$N_G(v)$	G 中顶点 v 的邻域
$\overline{N}_G(v)$	G 中顶点 v 的闭邻域
$N_D(v)$	有向图 D 中 v 的邻域
$\overline{N}_D(v)$	有向图 D 中 v 的闭邻域
Q	有理数集合
R	实数集合、二元关系
$r(R)$	R 的自反闭包
$\mathrm{ran}R$	R 的值域
$s(R)$	R 的对称闭包
$TE(v_i)$	v_i 的最早完成时间
$TL(v_i)$	v_i 的最晚完成时间
$TS(v_i)$	v_i 的缓冲时间
$t(R)$	R 的传递闭包
$V(G)$	图 G 的顶点集
$[x]_R$	x 关于 R 的等价类
Z	整数集合

续表

符号	注释
$\alpha_0(G)$	G的点覆盖数
$\alpha_1(G)$	G的边覆盖集
$\beta_0(G)$	G的点独立数
$\beta_1(G)$	G的匹配数(或边独立数)
$\gamma_0(G)$	G的支配数
$\Gamma_D^+(v)$	D中顶点v的后继元集
$\Gamma_D^-(v)$	D中顶点v的先驱元集
$\Delta(G)$	G的最大度数,简称最大度
$\Delta(D)$	有向图D的最大度
$\delta(G)$	G的最小度数,简称最小度
$\delta(D)$	有向图D的最小度
$\delta^+(D)$	有向图D的最小出度
$\delta^-(D)$	有向图D的最小入度
$\eta(G)$	G的割集秩
$\kappa(G)$	G的点连通度
$\lambda(G)$	G的边連通度
$\nu_1(G)$	G的团数
$\xi(G)$	G的圈秩
$\tau(G)$	G的生成树数
$\chi(G)$	G的点色数,简称色数
$\chi'(G)$	G的边色数
$\chi^*(G)$	平面地图的面色数
χ_A	A的特征函数
$\aleph$	实数集的基数
$\aleph_0$	自然数集合的基数

附录 2　名词与术语索引